July 12, 2018

情報システム理論

増山 博之

（京都大学 大学院情報学研究科）

1　講義概要

- 待ち行列と性能評価の歴史
- 基礎事項の復習
  - 確率論の基礎(確率空間, 確率変数, 分布, 密度関数, 確率母関数など)
  - ポアソン過程(基本的な性質, PASTA)
- 一般的な待ち行列に対して成り立つ結果
  - 到着率と退去率の関係
  - 到着直前と退去直後の系内客数分布の関係
  - リトルの公式とその応用
- 離散時間マルコフ連鎖とセミマルコフ型待ち行列
  - 離散時間マルコフ連鎖の復習
  - M/G/1 待ち行列, M/G/1/K 待ち行列, GI/M/1 待ち行列
- サービスシステムの性能評価のための公式
  - 複数サーバ待ち行列に対する近似公式 (予定)

2　待ち行列理論(トラヒック理論)の歴史

2.1　待ち行列理論(トラヒック理論)とは

定義

不特定多数のヒトやモノがサービス資源を求めて競合することによって発生する混雑現象の理解を目的とした応用数学の一分野

通信システムへの応用を意識するときには，トラヒック理論とよばれる．

手法

対象となるシステムを待ち行列モデル(次項で説明)で表現し，系内客数や待ち時間の分布，および呼損率(棄却率)などの指標を，マルコフ連鎖や再生過程に関する理論を用いて解析する．

代表的な公式

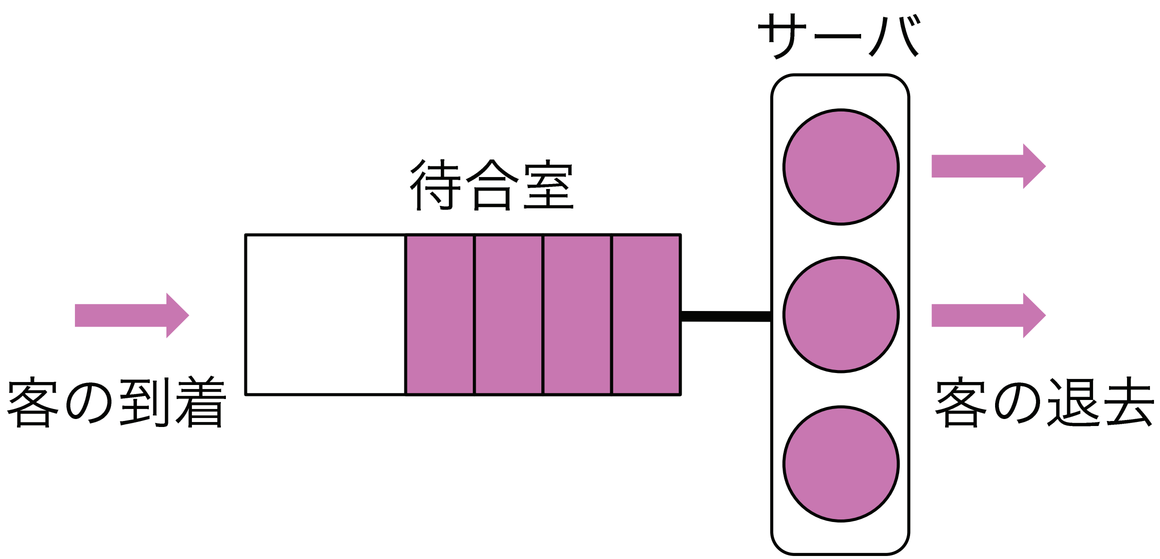
・リトルの公式: 平均系内客数と待ち時間の関係

・アーランの呼損式 (待合室のない複数サーバ待ち行列の呼損率)

・ポラチェック・ヒンチンの公式 (M/G/1の待ち時間分布のLST)

2.2 待ち行列の表記法

待ち行列は, サービス施設を利用するために客が到着し, 所望のサービスを受け, 退去していくさまを抽象化した数理モデルである.



待ち行列は下記5つの要素で特徴づけられ, ケンドールの記法によって, “A/B/c/D–E” の形で表現される.

到着過程(到着間隔分布)　サービス時間分布

サーバ数　待合室容量　サービス規律

- A: 到着過程
  - M: 到着間隔分布が指数分布, すなわちポアソン到着過程
  - E$_k$: 到着間隔分布がkステージアーラン分布
  - D: 一点分布
  - G: 一般の到着間隔分布 (i.i.d. であることを強調する場合はGIと書く)
- B: サービス時間分布
  - M, E$_k$, D, G など, A の部分と同じ記号が用いられる
- c: サーバ数
- D: 待合室の容量
  - 無限の場合には省略されることが多い
  - サーバ数と合計したシステム容量を表すこともある

- E: サービス規律
  - FCFS (First-Come-First-Served): 先着順にサービスする. 単一サーバの場合には, FIFO (First-In-First-Out) と書かれることもある.
  - LCFS (Last-Come-First-Served): 後着順にサービスする. 単一サーバの場合には, LIFO (Last-In-First-Out) と書かれることもある.
  - PS (Processor-Sharing): システム内にいる全ての客に対して, 均等にサービス処理能力が振り分けられる.
  - ROS (Random Order of Service): 客の到着順に関係なく, 待合室にいる客の中からランダムに客を選んでサービスを行う.

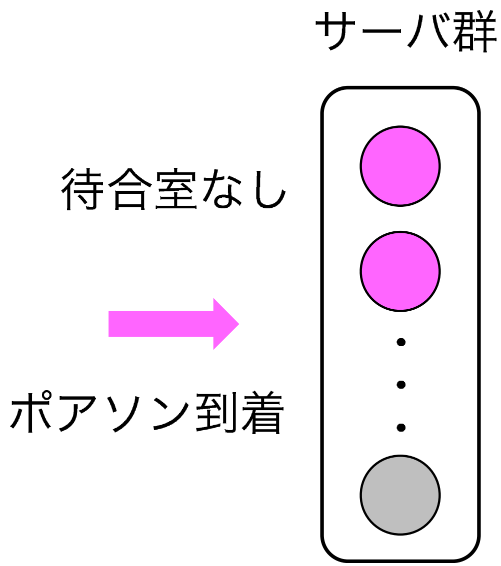
2.3 待ち行列の誕生: 電話交換システムへの応用

- 待ち行列の研究は, A.K. Erlang (1878–1929) によって, 創始された
  - A.K. Erlang, Probability and telephone calls, Nyt Tidsskrift for Matematik, Series B, vol. 20, pp. 33-39, 1909.
    無秩序に発生する電話の呼 (call の訳) がポアソン過程に従うことを示した
  - A.K. Erlang, Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges, Elektrotkeknikeren, vol. 13, pp. 5-13, 1917.
    アーラン呼損式の導出 (M/M/c/c 待ち行列の結果に基づく)
- 待ち行列理論の最初の応用先は, 電話交換システムの設計だった
  - 所望のサービスを提供するのに, 必要な回線数 (最初期の頃は交換手の人数) をアーラン呼損式によって見積もる

アーラン呼損式の復習

M/M/c/c待ち行列を考える

- サーバ数はcで, 待合室はなし
- 率λのポアソン到着
- 平均μ^{-1}の指数サービス時間分布
- トラヒック強度$\rho = \lambda/\mu$



定常状態において系内客数がkである確率をπ_k ($k = 0, 1, \ldots, c$)とすると, 局所平衡方程式は

$$\pi_{k-1}\lambda = \pi_k k\mu, \qquad k = 1, 2, \ldots, c,$$

となる. これをπ_kについて解き, 得られた漸化式を繰り返し用いると,

$$\pi_k = \frac{\rho^k}{k!}\pi_0, \qquad k = 0, 1, \ldots, c,$$

となるので, 正規化条件$\sum_{\ell=0}^{c} \pi_\ell = 1$を適用し,

$$\pi_k = \frac{\dfrac{\rho^k}{k!}}{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{c} \frac{\rho^\ell}{\ell!}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, c,$$

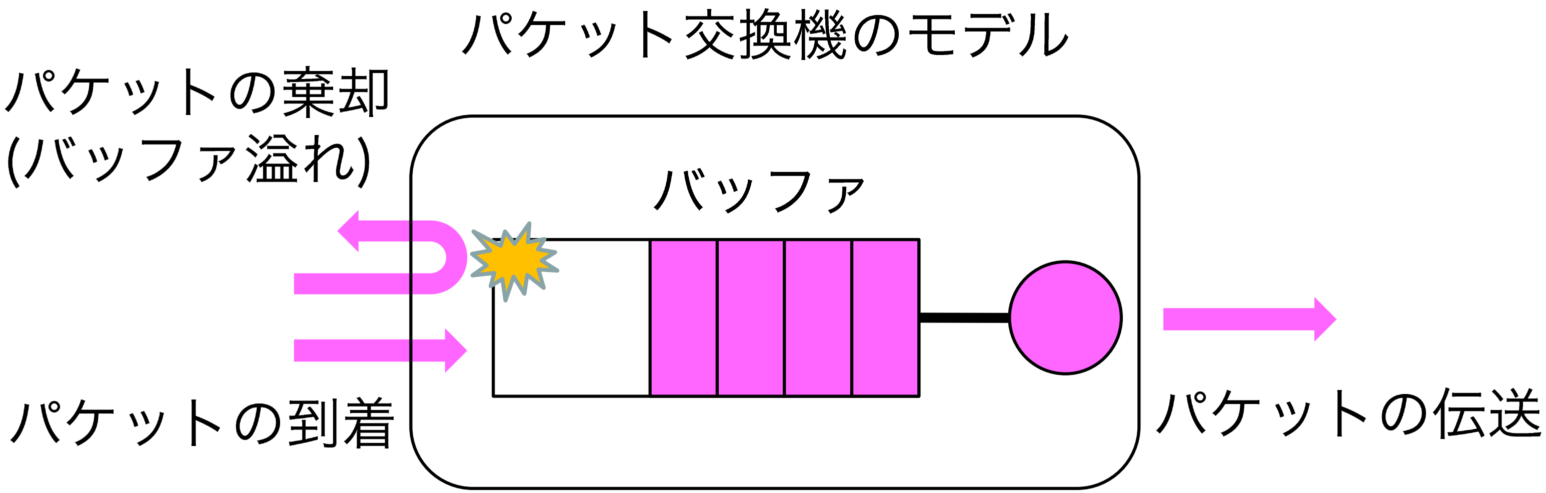
を得る. よって, PASTA (ポアソン到着は定常状態を観測するという事実) から, 到着した客がサービスを受けられない確率 B_c は, π_c に等しく,

$$B_c = \frac{\dfrac{\rho^c}{c!}}{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{c} \frac{\rho^\ell}{\ell!}}, \tag{1}$$

で与えられる. なお, 式(1) はアーランの B 公式とよばれ, M/G/c/c でも成り立つことが知られている.

2.4　パケット交換

- データをパケットとよばれる小さな固まりに分割して伝送する方式. パケットにはデータ本体と, 送信元や宛先のアドレス情報が含まれる.



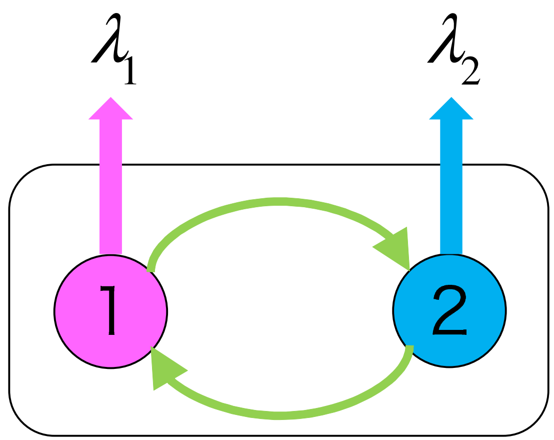
- 1970年代に, パケット棄却率や平均伝送遅延(平均待ち時間)といった指標が, M/G/1, M/G/1/K 待ち行列によって解析された.

2.5 Asynchronous Transfer Mode (ATM)

- ATM (Asynchronous Transfer Mode, 非同期転送モード) とは, 5バイトがヘッダ情報と48バイトの本体データ(合計53バイト)からなる 固定長のセルを基本単位とする通信方式である.
- 音声, 画像, テキストといった多様なデータを統一的に伝送できる
- 1980年代に, マルコフ変調ポアソン過程 を入力とする固定サービス待ち行列モデルを使って, セル棄却率の解析が行われた.

マルコフ変調ポアソン過程

マルコフ連鎖に支配された環境をもつポアソン過程であり, 環境の状態に依存した到着率をもつ.



マルコフ的に変化する環境が,
到着間の相関を表現する

2.6 インターネット

- 1990 年代中頃に, インターネット上の流れるトラヒックには長期依存性があるとの報告がなされた.
  - $Y(t)$: 時間区間 $[t, t+B)$ における到着数
  - $m(t)$: $Y(t)$ の平均
  - $v(x)$: 自己自己共分散, $Y(t)$ と $Y(t+x)$ の共分散

$$v(x) = \mathsf{E}[\{Y(t) - m(t)\}\{Y(t+x) - m(t+x)\}] \tag{2}$$

  $r(x)$: 自己自己共分散, $r(x) = \dfrac{v(x)}{v(0)}$ 次式が成り立つとき, 到着過程は長期依存性をもつという.

$$\int_0^\infty r(x)\mathrm{d}x = \infty.$$

- ポアソン到着過程やそのマルコフ型到着過程は, 長期依存性を持たない (短期依存性) であるため, 古典的な待ち行列理論が使えない.

- インターネット上のトラヒックモデルとして, ON/OFF 到着過程が導入された.

  ON/OFF 到着過程は, ON 期間と OFF 期間を交互に繰り返し, ON 期間のみ到着が発生する. ON 期間中の到着過程は, 一定間隔や指数間隔などのモデルがあり, ON 期間分布は裾の重い分布が用いられる.

- 平均遅延時間 (待ち時間) や呼損率 (棄却率) などの厳密解析が困難なため, 遅延時間分布の裾減衰や, 呼損率の漸近公式などの導出が行われた.
  - W: 遅延時間 (待ち時間)

$$\mathsf{P}(W > x) \overset{x}{\sim} cx^{-\alpha} \quad (\alpha > 0, c > 0)$$

  - $P_{\mathrm{loss}}(N)$: 呼損率 (N はバッファ容量)

$$P_{\mathrm{loss}}(N) \overset{x}{\sim} \kappa N^{-\beta} \quad (\beta > 0, \kappa > 0)$$

3 確率論の基礎

3.1 基本的な表記

- $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
- $\mathbb{S}$: 可算集合(例えば, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$, $\{1, 2, \dots, 10\}$ など)
- $\overline{A}$: 集合 A の補集合
- 背反な $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ な集合族に対して,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

- $1\!\!1(\,\cdot\,)$: 指示関数. 括弧の中の主張が真なら1, 偽ならば0を返す関数

$$1\!\!1(x^2 = 4) = \begin{cases} 1, & x = \pm 2, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases}$$

- 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $x^+ = \max(x, 0)$, $x^- = -\min(x, 0) = (-x)^+$

$$x = x^+ - x^-, \quad x^+ \cdot x^- = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3.2　位相空間

以下, $\mathbb{X}$ を抽象的な集合とする.

定義 3.1 集合 $\mathbb{X}$ に対して, 集合族 $\mathcal{O} \subseteq 2^{\mathbb{X}}$ が以下の (i)–(iv) を満たすとする. このとき, 組 $(\mathbb{X}, \mathcal{O})$ を, $\mathcal{O}$ を開集合系とする位相空間とよぶ. また, 開集合系 $\mathcal{O}$ に属する集合を開集合とよぶ.

(i) $O_\lambda \in \mathcal{O}$, $\lambda \in \Lambda$ (Λ は任意の添字集合) $\Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

(ii) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

(iii) $\mathbb{X} \in \mathcal{O}$

(iv) $\varnothing \in \mathcal{O}$

注意 3.1 ある空間 (集合) 上に開集合系を定めることを「位相を入れる (導入する)」ということがある.

注意 3.2 開集合系は, 有限回の積 (交叉) および任意回 (無限回も許す) の和 (合併) について閉じている.

定義 3.2 (近傍) 位相空間$(\mathbb{X}, \mathcal{O})$が与えられたとき, $x \in \mathbb{X}$に対して, 点(元) xを含む開集合$O \in \mathcal{O}$を, xの開近傍とよぶ. さらに, $\mathbb{X}$の部分集合Vが

$$x \in O \subseteq V,$$

を満たすとき, Vをxの近傍とよぶ. なお, 点xのすべての近傍からなる集合を$\mathcal{V}(x)$と表記する.

例 3.1 集合$\mathbb{X} = \{A, B, C\}$に対して,

$$\mathcal{O}_1 = \{\varnothing, \mathbb{X}\},$$

$$\mathcal{O}_2 = \{\varnothing, A, B, \{A, B\}, \{B, C\}, \mathbb{X}\},$$

$$\mathcal{O}_3 = \{\varnothing, A, B, C, \{A, B\}, \{B, C\}, \{C, A\}, \mathbb{X}\},$$

とすると, $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_1)$, $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_2)$, $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_3)$はすべて位相空間である.

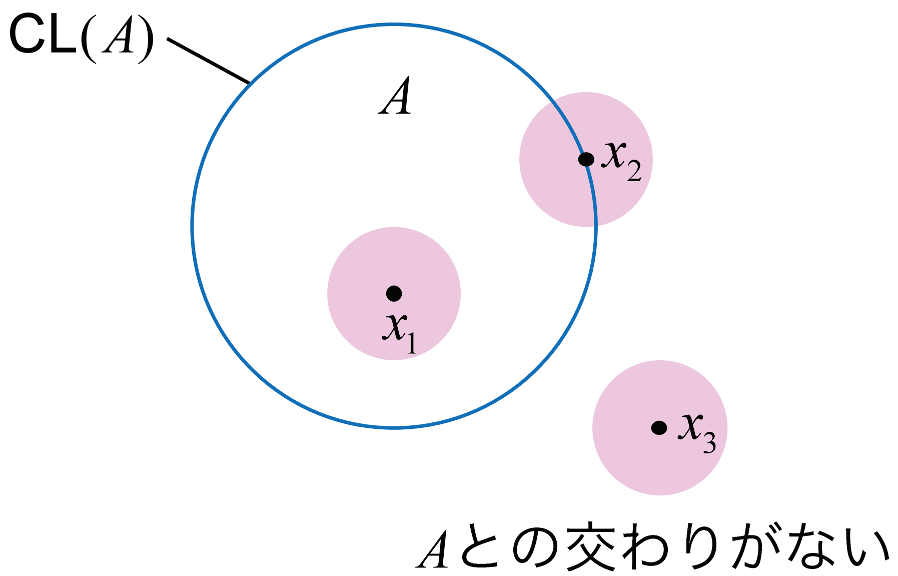
注意 3.3 例 3.1の3つの位相空間においては, $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_3$が成り立つので, 集合$\mathbb{X}$の情報を最も内包しているのは$(\mathbb{X}, \mathcal{O}_3)$である. 実際, $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_1)$では, $\mathbb{X}$内の任意の点に対する近傍は$\mathbb{X}$しかなく, A, B, Cを区別できない. また, $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_2)$では, BとCを区別できない.

定義 3.3 (閉集合) $\mathbb{X}$ の部分集合 A が閉集合であるとは, その補集合 $\overline{A}$ が開集合であるときにいう.

定義 3.4 (閉包) $\mathbb{X}$ の部分集合 A に対して, 次式で定義される $\mathrm{CL}(A)$ を A の閉包とよぶ.

$$\mathrm{CL}(A) = \{x \in \mathbb{X} : A \cap B \neq \varnothing; \forall B \in \mathcal{V}(x)\}$$

つまり, $\mathrm{CL}(A)$ は A を含む最小の閉集合である.

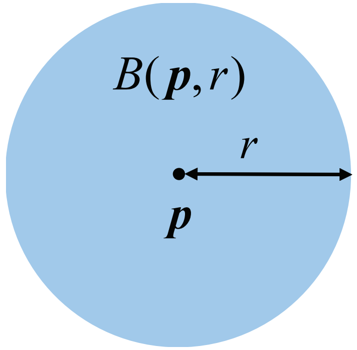


集合 A の閉包

定義 3.5 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を, 両者の間のユークリッド距離とする. さらに, 任意の $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$ に対して,

$$B(\boldsymbol{p}, r) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) < r\}$$

を, 点 $\boldsymbol{p}$ を中心とする半径 r 開球とよぶ.



$\mathbb{R}^n$ 上の開球

定義 3.6 (ユークリッド空間上の開集合系) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 O が開集合とよばれるのは, 任意の $\boldsymbol{p} \in O$ に対して,

$$B(\boldsymbol{p}, \varepsilon) \subset O,$$

をみたすような $\varepsilon > 0$ が存在するときである. また, $\mathbb{R}^n$ のすべての開集合からなる集合族を $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ と表記し, $\mathbb{R}^n$ の開集合系とよぶ.

定理 **3.1** 組 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$ は位相空間である.

証明　明らかに, $\mathbb{R}^n$ は開集合である ($\mathbb{R}^n$ は任意の開球を含む). 次に, 空集合 $\varnothing$ を考える. 空集合の定義から, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{x} \notin \varnothing$ であり, $\boldsymbol{x} \in \varnothing$ は偽である. したがって, 論理包含の真理値表* から,

$$\boldsymbol{x} \in \varnothing \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset \varnothing,$$

となり, 空集合 $\varnothing$ は開集合である. よって, 定義 3.1 の条件 (iii) と (iv) が成り立つ.

つづいて, 定義 3.1 の条件 (i) について考える. 添字集合 Λ を適当 (有限・無限を問わない) に取り, O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を開集合とする. $O := \cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ が空集合であれば開集合であるので, O は空集合ではない場合を考える. このとき,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \in O &\Longrightarrow \exists \lambda \in \Lambda \text{ s.t. } \boldsymbol{x} \in O_\lambda \\ &\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset O_\lambda \subset O \quad (\text{定義 3.6 より}) \end{aligned}$$

となるので, $O = \cup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ は開集合である.

* A ならば B という命題は, A が偽であるとき常に成り立つ.

最後に, 定義 3.1 の条件 (ii) を考える. 集合 O_1 および O_2 を開集合とすると,

$$\boldsymbol{x} \in O_1 \cap O_2 \Longrightarrow \exists \varepsilon_i > 0 \text{ s.t. } B(\boldsymbol{x}, \varepsilon_i) \subset O_i \ (i = 1, 2) \quad \text{(定義 3.6 より)}$$

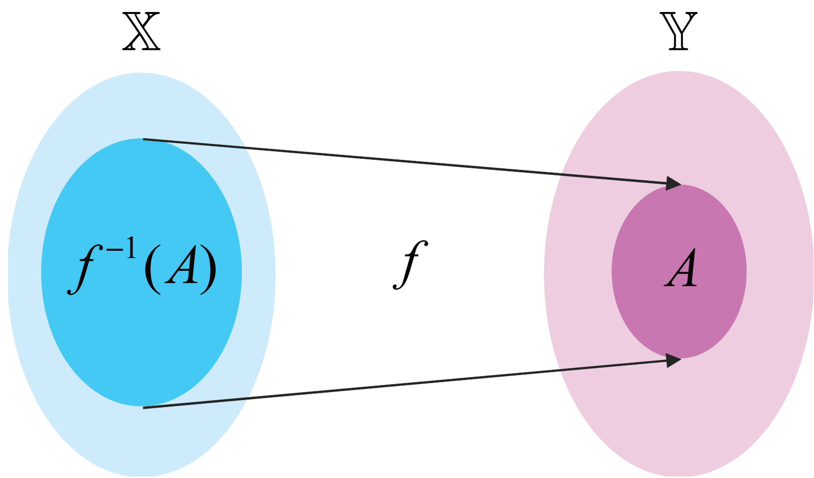
$$\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B(\boldsymbol{x}, \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \subset O_1 \cap O_2$$

となり, $O_1 \cap O_2$ は開集合である. □

定義 3.7 (逆像) 集合 $\mathbb{X}$ から $\mathbb{Y}$ (位相は必要ない) への関数(写像) f を考える. 任意の $A \subset \mathbb{Y}$ に対して,

$$f^{-1}(A) := \{x \in \mathbb{X} : f(x) \in A \subset \mathbb{Y}\}$$

で定義される $f^{-1}(A)$ を, 集合 A の f による逆像とよぶ.



f による逆像

定義 3.8 (連続写像) $(\mathbb{X}, \mathcal{O})$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{P})$ をそれぞれ位相空間とする．このとき，関数 $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ が連続写像であるとは, 次が成り立つときにいう.

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \in A\} \in \mathcal{O}, \quad \forall A \in \mathcal{P}$$

これは, 空間 Y における開集合の f による逆像が, 空間 X における開集合となることを意味している.

定理 3.2 関数 f を位相空間 $(\mathbb{X}, \mathcal{O})$ から $(\mathbb{Y}, \mathcal{P})$ への連続写像とするとき, 任意の $A, B \in \mathcal{P}$ に対して, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

(ii) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

注意 3.4 定理 3.2 より, $\mathcal{P}$ の元の列 $\{A_i; i \in \mathbb{N}\}$ に対して, 次式が成り立つ.

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i)$$

定理3.2の証明　まず,

$$f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A),$$
$$f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(B),$$

より, $f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ となる. 一方,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) &\Longrightarrow \{f(x) \in A \text{かつ} f(x) \in B\} \\ &\Longrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Longrightarrow x \in f^{-1}(A \cap B). \end{aligned}$$

したがって, $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$ となり, (i) が示された.

さらに, 逆像の定義より, $x \in f^{-1}(C) \Longleftrightarrow f(x) \in C$ であるので,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\Longleftrightarrow f(x) \in A \cup B \\ &\Longleftrightarrow f(x) \in A \ \text{あるいは}\ f(x) \in B \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \ \text{あるいは}\ x \in f^{-1}(B) \\ &\Longleftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

となり, (ii) が成り立つ. □

3.3　可測空間

定義 3.9 (σ 集合体と可測空間) 集合 $\mathbb{X}$ の部分集合の族 $\mathcal{X}$ が次の条件を満たすとき, $\mathcal{X}$ を集合 $\mathbb{X}$ 上の σ 集合体とよぶ (σ 加法族, あるいは完全加法族とよぶ).

(i) $\mathbb{X} \in \mathcal{X}$

(ii) $A \in \mathcal{X} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{X}$

(iii) $A_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$ (可算和について閉じている)

また, 組 $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ を可測空間とよび, $\mathcal{X}$ の属する集合を可測集合とよぶ.

注意 3.5 条件 (ii), (iii) およびド・モルガンの公式より, 排反な集合列 $A_n \in \mathcal{X}$ $(n \in \mathbb{N})$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} A_n \in \mathcal{X}\ (n \in \mathbb{N}) &\Longrightarrow \overline{A}_n \in \mathcal{X}\ (n \in \mathbb{N}) \\ &\Longrightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A}_n} \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

つまり, σ 集合体は可算積についても閉じている.

定義 3.10 (ボレル集合体**)** 位相空間$(\mathbb{X}, \mathcal{O})$において, 開集合系$\mathcal{O}$を含む最小の$\sigma$集合体をボレル集合体(ボレル集合族)とよび, $\mathcal{B}(\mathbb{X})$と表記する.

位相空間$(\mathbb{X}, \mathcal{O})$の開集合系$\mathcal{O}$を含むすべての$\sigma$集合体からなる族を$\{\mathcal{X}_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$とすると, ボレル集合体は$\mathcal{B}(\mathbb{X})$次式で与えられる.

$$\mathcal{B}(\mathbb{X}) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{X}_\lambda.$$

定義 3.11 (可測関数**)** $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$, $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ を可測空間とする. つまり, $\mathcal{X}$ および$\mathbb{X}$はそれぞれ$\mathbb{Y}$および$\mathcal{X}$上の$\mathcal{Y}$集合体とする. このとき, 関数$f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$が可測であるとは, 次式が成り立つときにいう.

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) \in A\} \in \mathcal{X}, \quad \forall A \in \mathcal{Y}. \tag{3}$$

式(3)は, Y における可測集合のfによる逆像が, X における可測集合となることを意味している.

定理 3.3 関数fを位相空間$(\mathbb{X}, \mathcal{O})$から位相空間$(\mathbb{Y}, \mathcal{P})$への連続写像とするとき, fは可測空間$(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$から$(\mathbb{Y}, \mathcal{B}(\mathbb{Y}))$への可測関数である.

証明　ボレル集合体の定義より, 任意の$B \in \mathcal{P}$に対して, ある開集合の列$\{B_\lambda \in \mathcal{P}; \lambda \in \Lambda_B\}$が存在し, それに和と積の組み合わせからなる適当な演算ξを施すことで, Bを構成することができる. これを

$$B = \xi\{B_\lambda; \lambda \in \Lambda_B\}, \tag{4}$$

と表記する. ここで, 定理 3.2より, 逆像演算f^{-1}と演算ξの順序は交換可能であることに注意する. よって, 式(4)から, 次式を得る.

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\xi\{B_\lambda; \lambda \in \Lambda_B\}) = \xi\{f^{-1}(B_\lambda); \lambda \in \Lambda_B\}. \tag{5}$$

連続写像の定義より, $f^{-1}(B_\lambda)$は位相空間$(\mathbb{X}, \mathcal{X})$の開集合系に属する. つまり, $f^{-1}(B_\lambda) \in \mathcal{O}$であるので, 開集合の列$\{f^{-1}(B_\lambda); \lambda \in \Lambda_B\}$に演算$\xi$を施した結果$\xi\{f^{-1}(B_\lambda); \lambda \in \Lambda_B\}$は, ボレル集合体$\mathcal{B}(\mathbb{X})$に属するので, これと式(5)から, $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$となる. 以上の議論より, 題意は示された. □

定義 3.12 (測度) $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ を可測空間とする．次の条件を満たすとき，μ を $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ 上の測度とよぶ.

(i) μ は, σ 集合体 $\mathcal{X}$ 上の実数値集合関数である ($\mu : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$).

(ii) $\mu(\varnothing) = 0$.

(iii) $\{A_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ を, 背反な $\mathcal{X}$ の元とすると次式が成り立つ.

$$\mu\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu(A_\lambda).$$

3.4 確率空間

定義 3.13 (標本空間) 標本空間とは, 起こり得るすべての結果(根元事象)の集合である. 通常, 標本空間はΩ, その元である結果はωと表記される.

定義 3.14 (事象) 標本空間Ωの部分集合を事象と呼ぶ.

定義 3.15 確率空間は次の3つの要素からなる.

(i) 標本空間Ω

(ii) 事象族$\mathcal{F}$: 事象の集まり (標本空間Ωの部分集合からなる族)

(iii) 事象の確率を測る集合関数 P: 事象族$\mathcal{F}$から$[0, 1]$の中へ写像

ただし, 事象族$\mathcal{F}$と集合関数Pはそれぞれ, 次頁で紹介する「事象の公理」と「確率の公理」を満たす.

3.5　事象の公理

事象の公理

事象族 $\mathcal{F}$ は, Ω 上の σ 集合体である. すなわち,

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

(iii) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (可算和について閉じている)

注意 **3.6**

(i) 事象の公理の条件 (i) と (ii) より, 空事象 $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{F}$

(ii) また, 事象族は可算積について閉じている (注意3.5参照).

3.6 確率の公理

確率の公理

集合関数 P は, 以下の (i)–(iii) を満たす.

(i) 任意の事象 $A \in \mathcal{F}$ に対して, $0 \leq \mathsf{P}(A) \leq 1$

(ii) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$

(iii) 排反な事象列 $A_n \in \mathcal{F}$ ($n \in \mathbb{N}$) に対して,

$$\mathsf{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) \qquad (\sigma\text{-加法性}) \tag{6}$$

(i)–(iii) を満たす集合関数 P は可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度という.

例 **3.2** 標本空間 Ω 上の σ 集合体は一意ではない. $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ とすると, 以下の部分集合族 $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ は共に Ω 上の σ 集合体である.

$$\mathcal{F}_1 = \{\varnothing, \{1,3,5\}, \{2,4,6\}, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_2 = 2^{\Omega} := \{A; A \subseteq \Omega\} \qquad (\Omega \text{ 上のべき集合})$$

べき集合: すべての部分集合からなる族

3.7 確率の連続性

定理 3.4

(i) 増加事象列$\{A_n; n=1,2,\ldots\}$に対して,

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n). \tag{7}$$

(ii) 減少事象列$\{B_n; n=1,2,\ldots\}$に対して,

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(B_n). \tag{8}$$

定理 3.4 の証明　$A_0=\varnothing$とする. 事象族$\{A_{n+1}-A_n; n\in\mathbb{Z}_+\}$は背反なので,

$$A_n = \sum_{m=0}^{n-1}(A_{m+1}-A_m), \qquad n\in\mathbb{N},$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}(A_{m+1}-A_m) = \sum_{m=0}^{\infty}(A_{m+1}-A_m).$$

確率のσ加法性より,

$$\mathsf{P}(A_n) = \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{n-1}(A_{m+1} - A_m)\right) = \sum_{m=0}^{n-1}\mathsf{P}(A_{m+1} - A_m), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathsf{P}\left(\sum_{m=0}^{\infty}(A_{m+1} - A_m)\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\mathsf{P}(A_{m+1} - A_m)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\mathsf{P}(A_{m+1} - A_m) = \lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(A_n).$$

したがって, 式(7)が成立する. 式(8)については, $A_n = \overline{B}_n$とし, ド・モルガンの法則と式(7)を用いることで容易に示せる. □

3.8　事象の極限

定義 3.16 事象列 $\{C_n; n \in \mathbb{N}\}$ に対して, 上極限と下極限はそれぞれ以下のように定義される.

$$\liminf_{n\to\infty} C_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} C_k, \tag{9}$$

$$\limsup_{n\to\infty} C_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} C_k. \tag{10}$$

上極限と下極限が一致するとき, その極限事象を $\lim_{n\to\infty} C_n$ と書く.

$A_n = \cap_{k\geq n} C_k$, $B_n = \cup_{k\geq n} C_k$ とおくと, $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ は増加事象列であり, $\{B_n; n \in \mathbb{N}\}$ は減少事象列であるので, 定理 3.4 を用いると, 次の結果を得る.

系 3.5 収束する事象列 $\{C_n; n \in \mathbb{N}\}$ に対して, 次式が成り立つ.

$$\mathsf{P}(\lim_{n\to\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(C_n). \tag{11}$$

3.9 事象の独立性

定義 3.17 事象 $A, B \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B), \tag{12}$$

が成り立つとき, 事象 A, B は互いに独立であるという.

3 つ以上の事象からなる族に対しても独立性は定義できる.

定義 3.18 (事象族の独立性) 事象族 $\mathcal{G} = \{A_n \in \mathcal{F}; n \in \mathbb{N}\}$ から取り出された任意の有限個の事象 $A_{n_i} \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ に対して

$$\mathsf{P}(A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_k}) = \mathsf{P}(A_{n_1}) \cdots \mathsf{P}(A_{n_k}),$$

が成り立つとき, $\mathcal{G}$ は独立な事象族と呼ばれる.

注意 3.7 事象$A, B, C \in \mathcal{F}$に対して

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B),$$
$$\mathsf{P}(B \cap C) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C),$$
$$\mathsf{P}(C \cap A) = \mathsf{P}(C)\mathsf{P}(A),$$

が成立していたとしても,

$$\mathsf{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C),$$

であれば, $\{A, B, C\}$は独立な事象族ではない.

例 **3.3** 3つのサイコロを投げる状況を考える.

- 事象A:「1つめと2つめのサイコロの目が同じ」
- 事象B:「2つめと3つめのサイコロの目が同じ」
- 事象C:「3つめと1つめのサイコロの目が同じ」

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$$

$$\mathsf{P}(B \cap C) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$$

$$\mathsf{P}(C \cap A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} = \mathsf{P}(C)\mathsf{P}(A)$$

$$\mathsf{P}(A \cap B \cap C) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} \neq \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)\mathsf{P}(C)$$

{A, B}, {B, C}, {C, A} のように2つの事象間では独立だが,

{A, B, C} は独立な事象族ではない.

3.10 条件付き確率

定義 3.19 事象 $B \in \mathcal{F}$ が正の確率をもつとき, 任意の事象 $A \in \mathcal{F}$ に対して, $\mathsf{P}(A \mid B)$ を次式のように定義する.

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}, \qquad \mathsf{P}(B) > 0. \tag{13}$$

$\mathsf{P}(A \mid B)$ を, 事象 B が起こった下での事象 A の条件付き確率と呼ぶ.

注意 3.8 $\mathsf{P}(B) = 0$ の場合にはラドン・ニコディムの定理が必要となる.

性質 3.1

(i) 任意の $A, B \in \mathcal{F}$ に対して, $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(B)\mathsf{P}(A \mid B)$.

これは $\mathsf{P}(B) = 0$ の場合でも成立する.

$$\mathsf{P}(B) = 0 \Longrightarrow \mathsf{P}(A \cap B) \leq \mathsf{P}(B) = 0$$

(ii) 事象 A と B が独立 $\Longrightarrow \mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A)$

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)} = \frac{\mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)}{\mathsf{P}(B)} = \mathsf{P}(A).$$

定理 3.6 確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$において，$B_i$ $(i \in \mathbb{N})$は排反事象，すなわち，$i \neq j$のとき，$B_i \cap B_j = \emptyset$であり，さらに，$\sum_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$をみたしているとする．このとき，$A \in \mathcal{F}$の確率$\mathsf{P}(A)$は次式で与えられる．

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_i)\mathsf{P}(A \mid B_i).$$

証明　$\sum_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$を用いると，

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\sum_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} A \cap B_i,$$

となる．さらに，確率のσ加法性と条件付き確率の定義を用いると，

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A \mid B_i)\mathsf{P}(B_i),$$

が得られる． □

例 **3.4** 一年間の地震による損害総額が1億円を越えるという事象をAとし, 一年間の地震発生件数がiであるという事象をB_iとする. ここで,

$$\mathsf{P}(B_i) = (1-p)p^i, \qquad i \in \mathbb{Z}_+,$$
$$\mathsf{P}(A \mid B_i) = 1 - q^i, \qquad i \in \mathbb{Z}_+,$$

が与えられているとする. ただし, $p, q \in (0,1)$とする. 事象列$\{B_i \in \mathbb{N}\}$は背反であるので, 定理 3.6より, 確率$\mathsf{P}(A)$は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{P}(B_i)\mathsf{P}(A \mid B_i) &= \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)p^i \times (1-q^i) \\ &= (1-p)\sum_{i=0}^{\infty}\{p^i - (pq)^i\} \\ &= 1 - \frac{1-p}{1-pq} = \frac{p(1-q)}{1-pq}.\end{aligned}$$

3.11　確率変数

定義 **3.20** Ωから$\mathbb{R}$への関数Xが

$$\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

を満たすとき, Xを可測空間$(\Omega, \mathcal{F})$上の(実数値)確率変数と呼ぶ.

注意 **3.9**

(i) 式(14)は, $\{X \leq x\}$が「事象」であることを意味している.

(ii) 事象の公理より,

$$\{X < x\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq x - 1/n\} \in \mathcal{F},$$
$$\{X > x\} = \overline{\{X \leq x\}} \in \mathcal{F},$$
$$\{X \geq x\} = \overline{\{X < x\}} \in \mathcal{F}.$$

(iii) 任意の実数a, b $(a < b)$に対して,

$$\{X < a, b \leq X\} = \{X < a\} \cup \{X \geq b\} \in \mathcal{F},$$

$$
\begin{aligned}
\{X \le a, b < X\} &= \{X \le a\} \cup \{X > b\} \in \mathcal{F}, \\
\{a \le X < b\} &= \overline{\{X < a, b \le X\}} \in \mathcal{F}, \\
\{a < X \le b\} &= \overline{\{X \le a, b < X\}} \in \mathcal{F}, \\
\{X = a\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ a - \frac{1}{n} < X \le a + \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}.
\end{aligned}
$$

次に確率変数の別定義を与える.

定義 3.21 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上のボレル集合体, すなわち $\mathbb{R}$ のすべての開集合を含む最小の σ 集合体とする. このとき, 関数 $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ が

$$
X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),
$$

を満たすとき, X を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率変数と呼ぶ.

この定義を用いて, 下の定理を証明することができる.

定理 3.7 X を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率変数とし, g を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続な関数とする. このとき, $Y = g(X)$ も確率変数となる.

例 3.5 X が確率変数であれば, X^α ($\alpha \in \mathbb{R}$), $\exp\{X\}$, $\log X$ も確率変数である.

証明　定義より, 確率変数 X は可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ への可測関数である. また, 定理 3.3 より, g は可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ への可測関数である. したがって,

$$(\Omega, \mathcal{F}) \xrightarrow{\quad X \quad} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \xrightarrow{\quad g \quad} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

となり, 合成関数 $g \circ X$ は
まず, 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して, 連続関数 $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ による逆像を $g^{-1}(B)$ と定義する. すなわち, 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ への可測関数である. よって, $Y = g(X)$ は可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の実数値確率変数となる. □

3.12 確率変数の独立性

定義 3.22 (2つの確率変数の独立性) 確率変数 X と Y が独立とは，任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$\mathsf{P}(X\le x,\ Y\le y)=\mathsf{P}(X\le x)\mathsf{P}(Y\le y), \tag{15}$$

が成立するときにいう.

定義 3.23 (3つ以上の確率変数の独立性) 確率変数列 $\{X_i; i\ \in\ \mathbb{S}\}$ が独立とは，添字集合 $\mathbb{S}$ (加算集合) に含まれる任意の有限個の元 $n_1,n_2,\ldots,n_m$ と $(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ に対して，

$$\mathsf{P}(X_{n_1}\le x_{n_1},X_{n_2}\le x_{n_2},\ldots,X_{n_m}\le x_m)=\prod_{j=1}^{m}\mathsf{P}(X_{n_j}\le x_j),$$

が成立するときにいう.

3.13 分布関数

定義 3.24 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ 上の実数値確率変数 X に対し,

$$\mathsf{P}_X(A) = \mathsf{P}(X^{-1}(A)) = \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\}), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

と定義される可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P_X を, X の分布と呼ぶ.

注意 3.10 $\mathsf{P}_X(A)$ は, 「確率変数 X の値が集合 A に属する」という結果(根元事象) の集まり (事象) に対して割り当てられた確率である.

定義 3.25 次式で定義される F と $\overline{F}$ をそれぞれ, 確率変数 X の分布関数および補分布関数とよぶ.

$$F(x) = \mathsf{P}(X \le x), \quad \overline{F}(x) = 1 - F(x) = \mathsf{P}(X > x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

注意 3.11 分布関数 F から可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 P_X を一意的に定めることもできるので, F を単に分布と呼ぶことも多い.

定理 3.8 Fを確率変数Xの分布関数とするとき, 以下の(i)–(iii)が成り立つ.

(i) Fは単調非減少関数である.

(ii) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

(iii) Fは右連続でかつ左極限をもつ.

注意 3.12 定理 3.8の(i)–(iii)の性質を満たす関数Fを, 対応する確率変数を特定せず単に分布関数と呼ぶことがある.

証明　確率のσ加法性より, 任意の$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ($x_1 \le x_2$)に対して,

$$
\begin{aligned}
F(x_2) &= \mathsf{P}(X \le x_2) = \mathsf{P}(\{X \le x_1\} + \{x_1 < X \le x_2\}) \\
&= \mathsf{P}(X \le x_1) + \mathsf{P}(x_1 < X \le x_2) \\
&\ge \mathsf{P}(X \le x_1) = F(x_1).
\end{aligned}
$$

よって, (i)が示された.

次に(ii)を示す. $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ を満たす任意の増加列 $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ に対して, 次式が成り立つ.

$$\Omega = \{\omega \in \Omega; X(\omega) < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X < x_n\}.$$

事象列 $\{\{X < x_n\}; n \in \mathbb{N}\}$ は増加列であるから, 定理 3.4(確率の連続性) より,

$$\begin{aligned} 1 = \mathsf{P}(\Omega) &= \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X < x_n\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(X < x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n), \end{aligned}$$

を得る. ただし, 2つ目の等号では確率の σ 加法性を用いた. 以上の議論により, (ii) が示された.

最後に (iii) を示す. まず, 分布関数 F の右連続性を示す. $\{\varepsilon_n > 0; n \in \mathbb{N}\}$ を $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ を満たす任意の減少列とすると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, 事象列 $\{\{X \le x + \varepsilon_n\}; n \in \mathbb{N}\}$ は減少列であり, 次式が成り立つ.

$$\{X \le x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \le x + \varepsilon_n\}.$$

したがって, 定理 3.4(確率の連続性) を適用すると,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathsf{P}(X \le x) = \mathsf{P}\left(\cap_{n=1}^{\infty}\{X \le x + \varepsilon_n\}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(X \le x + \varepsilon_n) = \lim_{n\to\infty} F(x + \varepsilon_n), \end{aligned}$$

となり, F は右連続である.

また, (i) より F は単調非減少であるので, 任意に固定された $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\{F(x - \varepsilon_n) \le 1; n \in \mathbb{N}\}$ は上に有界な単調非減少列である. したがって, 左極限 $F(x-) = \lim_{n\to\infty} F(x - \varepsilon_n)$ が存在する. □

3.14 密度関数

定義 3.26 非負関数 f が次式を満たすとき, f を F の密度関数と呼ぶ.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}_{+}. \tag{16}$$

F が確率変数 X の分布関数であるとする.

(i) F の微分不可能な点の集合を A としたとき, $\mathsf{P}(X \in A) = 0$ であるならば, F および X の密度関数 f が存在する.

(ii) 点 x の近傍において F が微分可能ならば,

$$\mathsf{P}(x < X \leq x + \Delta x) = f(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

が成り立つ.

3.15　分布の例

- 指数分布: $\mu > 0$

$$F(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$
$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

- n次アーラン(Erlang)分布: $\mu > 0$, $n \in \mathbb{N}$

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^i}{i!}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$
$$f(x) = \mu e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(k-1)!}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

  - $n = 1$のとき, 指数分布となる
  - X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)が独立かつ同一のパラメータμの指数分布に従うとき, $X_1 + \cdots + X_n$はパラメータμのn次アーラン分布に従う.

- k次超指数分布: $\mu_i > 0$, $0 < q_i \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$; $\sum_{i=1}^{k} q_i = 1$

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^{k} q_i e^{-\mu_i x}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$
$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} q_i \mu_i e^{-\mu_i x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+$$

- ワイブル(Weibull)分布: $c > 0$, $\beta \in (0, \infty)$

$$F(x) = 1 - e^{-cx^{\beta}}, \qquad x \in \mathbb{R}_+$$
$$f(x) = c\beta x^{\beta-1} e^{-cx^{\beta}}, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

- パレート(Pareto)分布: $\alpha, \beta > 0$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha}, \quad x \geq \beta$$
$$f(x) = \alpha\beta^{\alpha} x^{-\alpha-1}, \quad x \geq \beta$$

3.16 リーマン・スティルチェス積分

区間 $[a, b]$ を, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ のように分割する. ただし,

$$\delta_n = \sup_{i=0,1,\ldots,n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

各小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ に対して, $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ を任意に選ぶ. 区間 $[a, b]$ の分割の仕方や c_i ($i \in \mathbb{Z}_+$) の選び方に関係なく, 下の式 (17) で定義される極限がある一定の値に収束するとき, その極限値を $\int_a^b h(x)\mathrm{d}F(x)$ と定義する.

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n \to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} h(c_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i-)) := \int_a^b h(x)\mathrm{d}F(x). \tag{17}$$

ただし, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $F(x-) = \lim_{y\uparrow x} F(y)$ とする.

式 (17) に対して, $a \to -\infty$ かつ $b \to \infty$ とする極限を考えたとき, $\int_a^b h(x)\mathrm{d}F(x)$ が収束するなら, その極限値を $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\mathrm{d}F(x)$ と書く.

F が区間 $[a,b]$ を含む領域で微分可能なとき, 次式が成り立つ.

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}F(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} h(c_i) \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i-)}{x_{i+1}-x_i}(x_{i+1}-x_i)$$
$$= \int_a^b h(x)F'(x)\mathrm{d}x. \tag{18}$$

記号 $\mathrm{d}F(x)$ の直感的解釈

- $\mathrm{d}F(x) = F(x+\mathrm{d}x) - F(x) = F'(x)\mathrm{d}x$ (微分可能な場合)
- F が確率変数 X の分布関数である場合

$$\mathrm{d}F(y) = F(y+\mathrm{d}y) - F(y) = \mathsf{P}(y < X \le y+\mathrm{d}y)$$
$$\mathsf{P}(X \le x) = \int_0^x \mathsf{P}(y < X \le y+\mathrm{d}y) = \int_0^x \mathrm{d}F(y)$$
$$= \int_0^x F'(y)\mathrm{d}y \quad \text{(微分可能な場合)}$$

次のような離散型分布関数 F を考える.

$$F(x) = \sum_{k=\infty}^{\lfloor x \rfloor} p_k, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

式(17) において, 小区間幅の上限を 1 未満 ($\delta_n < 1$) とし, 各小区間の代表値 $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ は整数とすると, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} h(c_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i-)) \\
&\quad = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n\to 0}} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor} \mathbb{1}(k \in [x_i, x_{i+1}])h(c_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i-)) \\
&\quad = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n\to 0}} \sum_{k=\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}(k \in [x_i, x_{i+1}])h(c_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i-)) \\
&\quad = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta_n\to 0}} \sum_{k=\lceil a \rceil}^{\lfloor b \rfloor} h(k)p_k.
\end{aligned}$$

3.17 期待値

定義 3.27 確率変数 X の分布関数 F が, $\int_0^\infty x\mathrm{d}F(x) < \infty$ または $\int_{-\infty}^0 |x|\mathrm{d}F(x) < \infty$ を満たすとき, X の期待値 $\mathsf{E}[X]$ は

$$\mathsf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x), \tag{20}$$

と定義される. また, F が密度関数 f をもつとき, 式(20) は次のように書き換えられる.

$$\mathsf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$$

定理 3.9

$$\mathsf{E}[X] = \int_0^\infty \mathsf{P}(X^+ > x)\mathrm{d}x - \int_0^\infty \mathsf{P}(X^- > x)\mathrm{d}x. \tag{21}$$

ただし, $(x)^+ = \max(x, 0)$, $x^- = (-x)^+ = -\min(x, 0)$ である.

定理 3.9 の証明　$X = X^+ - X^-$ より, $\mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[X^+] - \mathsf{E}[X^-]$ となる. よって, X を非負確率変数($\mathsf{P}(X < 0) = 0$) とし,

$$\mathsf{E}[X] = \int_0^\infty \mathsf{P}(X > x)\mathrm{d}x, \tag{22}$$

を示せば十分である. X の分布関数を F とおくと,

$$\mathsf{P}(X > x) = \int_x^\infty \mathrm{d}F(y), \qquad x \geq 0,$$

となるので, これを用いて (22) の右辺を変形する.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathsf{P}(X > x)\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \mathrm{d}x \int_x^\infty \mathrm{d}F(y) = \int_0^\infty \mathrm{d}F(y) \int_0^y \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty y\mathrm{d}F(y) = \mathsf{E}[X].\end{aligned}$$

□

命題 3.10 X を確率変数とし, その分布関数を F とする. このとき, $\mathbb{R}$ 上の連続な実数値関数 h を用いて定義される確率変数 $Y = h(X)$ の期待値は次式で与えられる.

$$\mathsf{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\mathrm{d}F(x).$$

例 3.6

(i) $h(x) = (x - \mathsf{E}[X])^2 \Longrightarrow$ 分散 $\mathsf{Var}[X]$:

$$\mathsf{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathsf{E}[X])^2 \mathrm{d}F(x) = \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2.$$

(ii) $h(x) = x^n \Longrightarrow n$ 次モーメント (積率) $\mathsf{E}[X^n]$:

$$\mathsf{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \mathrm{d}F(x).$$

3.18 ラプラス・スティルチェス変換

定義 3.28 分布関数 F をもつ確率変数 X に対して, 次式で定義される $\widetilde{F}(s)$ $(\mathrm{Re}(s) \geq 0)$ を, X (または分布関数 F) のラプラス・スティルチェス変換 (LST: Laplace-Stieltjes transform) という.

$$\widetilde{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} \mathrm{d}F(x) = \mathsf{E}[e^{-sX}].$$

注意 3.13 分布関数 F の密度関数 f が存在するとき, LST $\widetilde{F}(s)$ は次のように書くことができる.

$$\widetilde{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) \mathrm{d}x.$$

非負確率変数 X のLST $\widetilde{F}(s)$ は以下の性質をもつ.

(i) $\widetilde{F}(s)$ は $\mathrm{Re}(s) \geq 0$ で絶対収束, $\mathrm{Re}(s) > 0$ で何回でも微分可能

(ii) 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(-1)^m \lim_{s \downarrow 0} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}s^m} \widetilde{F}(s) &= \lim_{s \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-sx} \mathrm{d}F(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^m \mathrm{d}F(x) = \mathsf{E}[X^m]. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

となるので, $\widetilde{F}(s)$ を適当な回数だけ微分して, $s \downarrow 0$ とすれば, モーメントが求まる.

命題 3.11 関数 $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ が分布関数であることと, そのLSTに対して,

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{F}^{(n)}(0) = 1, \\
&(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s} \widetilde{F}^{(n)}(s) \geq 0, \quad s > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (24)
\end{aligned}
$$

が成り立つことは等価である.

注意 3.14 式(24) を満たす関数は, 完全単調 (completely monotone) とよばれる.

3.19　分布の畳込み

分布の畳込みは, 独立な確率変数の和の分布を表現するために用いられる.

定義 3.29 分布関数 F, G の畳込み $F * G$ は, 次のように定義される.

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\mathrm{d}G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}F(y)G(x-y), \quad x \in \mathbb{R}.$$

また, F の n 重畳込みは F^{*n} と表記する. 定義より,

$$\begin{aligned} F^{*n}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F^{*(n-1)}(x-y)\mathrm{d}F(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\mathrm{d}F^{*(n-1)}(y), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ただし, F^{*0} は次のような階段関数とする.

$$F^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

例 **3.7**

- 分布関数 F が密度関数 f をもつ場合:

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)G(x-y)\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- F, G が非負確率変数の分布関数である場合:

$$\begin{aligned} F * G(x) &= \int_0^x F(x-y)\mathrm{d}G(y) \\ &= \int_0^x \mathrm{d}F(y)G(x-y), \quad x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

定理 **3.12** 確率変数 X と Y は独立であり, それぞれ, 分布関数 F および G に従うものとする. このとき, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $\mathsf{P}(X+Y \le x) = F * G(x)$ ($x \in \mathbb{R}$)

(ii) $\mathsf{E}[\mathrm{e}^{-s(X+Y)}] = \widetilde{F}(s)\widetilde{G}(s)$

証明　(i) は次のように示される.

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{P}(X+Y \le x) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(X \le x-y)\mathrm{d}\mathsf{P}(Y \le y) \ \ (= \mathsf{P}(y < Y \le y+\mathrm{d}y)) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)\mathrm{d}G(y) = F * G(x).
\end{aligned}
$$

また, 独立な確率変数の積の期待値は, それぞれの期待値の積となるので (フビニの定理),

$$
\mathsf{E}[\mathrm{e}^{-s(X+Y)}] = \mathsf{E}[\mathrm{e}^{-sX}]\mathsf{E}[\mathrm{e}^{-sY}] = \widetilde{F}(s)\widetilde{G}(s),
$$

となる. よって, (ii) が成立する. $\square$

定理 3.12から, 直ちに次の結果を得る.

系 3.13 n個の確率変数$X_1, X_2, \ldots, X_n$は独立かつ同一の分布Fに従うとき, 次の(i), (ii)が成り立つ.

(i) $\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le x) = F^{*n}(x)$ ($x \in \mathbb{R}$)

(ii) $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{-s(X_1+X_2+\cdots+X_n)}] = (\widetilde{F}(s))^n$

例 3.8 Fを平均μ^{-1}の指数分布の分布関数とする. すなわち,

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu x}, \qquad x \ge 0.$$

このとき, Fのn重畳込みF^{*n} ($n = 1, 2, \ldots$) は次式で与えられる.

$$F^{*n}(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-\mu x} \frac{(\mu x)^i}{i!}, \qquad x \ge 0. \tag{25}$$

つまり, F^{*n}はn次アーラン分布の分布関数となる. 以下, 式(25)を帰納法で示す. まず, $n = 1$のとき, $F^{*1} = F$であるので, 式(25)は成立する. そこで, ある $n = k \ge 1$に対して, 式(25)が成り立つとすると,

$$
\begin{aligned}
F^{*(k+1)}(x) &= \int_0^x F^{*(k)}(x-y)\mathrm{d}F(y) \\
&= \int_0^x \left[1 - \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-\mu(x-y)} \frac{\{\mu(x-y)\}^i}{i!}\right] \mu\mathrm{e}^{-\mu y}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^x \mu\mathrm{e}^{-\mu y}\mathrm{d}y - \mu\mathrm{e}^{-\mu x} \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^x \frac{\{\mu(x-y)\}^i}{i!}\mathrm{d}y \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\mu x} - \mathrm{e}^{-\mu x} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\mu x)^{i+1}}{(i+1)!} \\
&= 1 - \sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\mu x} \frac{(\mu x)^i}{i!}
\end{aligned}
$$

となり, 式(25)が$n = k + 1$で成立することがわかる.

3.20　整数値確率変数(離散型確率変数)

定義 3.30 確率変数 X の取りうる値が整数値に限定されるとき, 次式で定まる関数 p を確率関数という.

$$p(k) = \mathsf{P}(X = k), \qquad k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

また, 期待値 $\mathsf{E}[X]$ は次式で与えられる.

$$\mathsf{E}[X] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k p(k).$$

一般に, 連続な関数 h に対して,

$$\mathsf{E}[h(X)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) p(k).$$

例 **3.9 (離散型確率分布)**

(i) 幾何分布: $0 < \gamma < 1$

$$p(k) = (1-\gamma)\gamma^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$
$$\mathsf{E}[X] = \frac{\gamma}{1-\gamma}$$

(ii) ポアソン分布: $\lambda > 0$

$$p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$$
$$\mathsf{E}[X] = \lambda$$

(iii) 二項分布: $0 < q < 1$, $N = 1, 2, \ldots$

$$p(k) = \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k}, \quad 0 \le k \le N$$
$$\mathsf{E}[X] = qN$$

ただし, $\binom{N}{k} = N!/(k!(N-k)!)$ とする.

3.20.1　確率母関数

定義 3.31 確率関数 p をもつ整数値確率変数 X に対して, 次式で定義される $\widehat{p}(z)$ $(|z| \leq 1)$ を X (または確率関数 p) の確率母関数という.

$$\widehat{p}(z) = \mathsf{E}[z^X] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k p(k)$$

性質 3.2 整数値確率変数 X の確率母関数 $\widehat{p}(z)$ は次の性質をもつ.

(i) $\widehat{p}(z)$ は $|z| \leq 1$ で絶対収束し, $|z| < 1$ で何回でも微分可能

(ii) 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} \lim_{z \uparrow 1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m} \widehat{p}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1)p(k) \\ &= \mathsf{E}[X(X-1)\cdots(X-m+1)]. \end{aligned} \tag{26}$$

右辺の値は m 次の階乗積率と呼ばれる.

定義 3.32 確率関数p, qの畳込み$p \circledast q$は次式で定義される.

$$p \circledast q(k) := \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p(k-l)q(l) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p(l)q(k-l), \qquad k \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

注意 3.15 p, qが共に, 非負整数値をとる確率変数の確率関数であるならば,

$$p(k) = q(k) = 0, \qquad k = -1, -2, \ldots,$$

であるので, 式(27)は次のように書き換えられる.

$$p \circledast q(k) := \sum_{\ell=0}^{k} p(k-l)q(l) = \sum_{\ell=0}^{k} p(l)q(k-l), \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

例 3.10 次のような幾何分布の確率関数pを考える.

$$p(k) = (1-\gamma)\gamma^k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

この確率関数p自身の2重畳込み$p \circledast p$は次のように計算できる.

$$p \circledast p(k) = (1-\gamma)^2 \sum_{l=0}^{k} \gamma^{\ell}\gamma^{k-\ell} = k(1-\gamma)^2\gamma^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

定理 3.14 独立な整数値確率変数XとYの確率関数をそれぞれp, qとすると
き, $X+Y$の確率関数はp, qの畳込み$p \circledast q$で与えられる.

$$\mathsf{P}(X+Y=k) = p \circledast q(k), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{28}$$

また, p, qの確率母関数をそれぞれ$\widehat{p}(z), \widehat{q}(z)$とすると, 確率変数$X+Y$ (ま
たは確率関数$p \circledast q$) の確率母関数は次式で与えられる.

$$\mathsf{E}[z^{X+Y}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k p \circledast q(k) = \widehat{p}(z)\widehat{q}(z). \tag{29}$$

注意 3.16 $\widetilde{F}(s) = \mathsf{E}[\mathrm{e}^{-sX}]$とおくと,

$$\widetilde{F}(-\log z) = \mathsf{E}[z^X] = \widehat{p}(z),$$

となり, LST に関する定理 3.12 と同様の結果が確率母関数についても成立する.

定理3.14の証明　まず式(28)を示す. 定理 3.6を用いると,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X+Y=k) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(X=\ell)\mathsf{P}(X+Y=k \mid X=\ell) \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(X=\ell)\mathsf{P}(Y=k-\ell \mid X=\ell) \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(X=\ell)\mathsf{P}(Y=k-\ell) \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p(\ell)q(k-\ell) = p \circledast q(k),\end{aligned}$$

となり, 確かに式(28)が成り立つ.

次に, 式(29)を示す. 確率母関数の定義と式(28)より,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[z^{X+Y}] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \mathsf{P}(X+Y=k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k p \circledast q(k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} p(\ell) q(k-\ell) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} z^\ell p(\ell) z^{k-\ell} q(k-\ell) \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} z^\ell p(\ell) \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{k-\ell} q(k-\ell), \qquad (30)
\end{aligned}
$$

任意に固定された$\ell \in \mathbb{Z}$に対して,

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{k-\ell} q(k-\ell) = \widehat{q}(z),
$$

が成り立つ. これを式(30)に代入することで, 以下のように式(29)が得られる.

$$
\mathsf{E}[z^{X+Y}] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} z^\ell p(\ell) \widehat{q}(z) = \widehat{p}(z)\widehat{q}(z).
$$

□

3.21 確率過程

定義 3.33 $\mathbb{T}$を添字集合(全順序集合)とする．さらに，X_tを，添字$t \in \mathbb{T}$が付された確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$上の確率変数とする．このとき，確率変数の集合$\{X_t; t \in \mathbb{T}\}$を確率過程とよび，添字$t$を時刻とよぶ.

注意 3.17 $\mathbb{T}$が全順序集合であるとは，その任意の2つの元s, t, uに対して，以下をみたすような関係$\leq$が存在するときにいう.

(i) 反射律: $s \leq t$ かつ $t \leq s$ならば，$s = t$である.

(ii) 推移律: $s \leq t$ かつ $t \leq u$ならば，$s \leq u$である.

(iii) 比較可能: $s \leq t$ あるいは $t \leq s$が成り立つ.

注意 3.18 以下では，添字集合$\mathbb{T}$を，離散時間$\mathbb{Z}_+$，あるいは，連続時間$\mathbb{R}_+$とする.

定義 3.34 (情報系) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を確率空間とする. 事象族 $\mathcal{F}$ の部分 σ 集合体の列 $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}; t \in \mathbb{T}\}$ が,

$$t \leq u \Longrightarrow \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_u, \tag{31}$$

を満たすとき, $\{\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}; t \in \mathbb{T}\}$ を情報系 (filtration) とよぶ.

注意 3.19 式 (31) は, 時刻 t の増加に伴い, 確率を割り当てる対象 (事象) が増加することを意味している.

定義 3.35 (適合) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $\{\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}; t \in \mathbb{T}\}$ を情報系とする. このとき, 任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して, X_t が可測空間 $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ 上の確率変数 (可測関数) であるとき, すなわち,

$$\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}_t, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

であるとき, 確率過程 $\{X_t; t \in \mathbb{T}\}$ は, 情報系 $\{F_t; t \in \mathbb{T}\}$ に適合しているという. また, 略して, $\{X_t; t \in \mathbb{T}\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$–適合であるという.

3.22 半群と指数関数

補題 3.15 関数 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ が右連続であり, また,

$$f(x+y)=f(x)f(y),\qquad x,y\in\mathbb{R}_+, \tag{32}$$

を満たすとき, 関数 f は恒等的にゼロであるか, ある定数 β が存在して,

$$f(x)=e^{\beta x},\qquad x\in\mathbb{R}_+.$$

注意 3.20 関数方程式 (32) と $f(0)=1$ を満たす関数の族を半群と呼ぶ.

補題 3.15 の証明　式 (32) において, $x=y=0$ とおくと, $f(0)=[f(0)]^2$ となるので, $f(0)=0$ または $f(0)=1$ である. また, 式 (32) において, $y=0$ とすると, 任意の $x\in\mathbb{R}_+$ に対して, $f(x)=f(x)f(0)$ となるので, $f(0)=0$ のとき, 関数 f は恒等的にゼロとなる. よって, 以下では $f(0)=1$ の場合について考える.

式(32)を繰り返し用いると, 任意の$n, m \in \mathbb{N}$に対して,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n}\right) &= f\left(\frac{m-1}{n}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{m-2}{n}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \cdots = \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m, \end{aligned} \tag{33}$$

を得る. 式(33)において, $m = n$として$f(1/n)$について解くと,

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = [f(1)]^{\frac{1}{n}},$$

となる. さらに, これを式(33)に代入して, 次式を得る.

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = [f(1)]^{\frac{m}{n}}.$$

これより, 任意の正の有理数rについて, $f(r) = [f(1)]^r$が成り立つことがわかる.

ところで, 有理数の集合は実数の集合に対して稠密であるので, 任意の$x \in \mathbb{R}_+$に対して, それに上から収束するような有理数の列$\{r_k; k \in \mathbb{Z}_+\}$が存在する.

$$r_k \searrow x, \qquad \text{as } k \to \infty.$$

この事実と, 関数 f の右連続性から,

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f(r_k) = \lim_{k \to \infty} [f(1)]^{r_k} = [f(1)]^x, \qquad x \in \mathbb{R}_+,$$

となる. ここで, $\beta = \log f(1)$ とすると, $f(x) = e^{\beta x}$ と書くことができる. 以上の議論により, 補題3.15のすべての主張が示された. □

3.23　ポアソンの少数の法則

定理 3.16 $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ を独立かつ同一に分布する確率変数列とし,

$$\mathsf{P}(X_n = 1) = p \in (0,1), \qquad \mathsf{P}(X_n = 0) = 1 - p,$$

を満たしているとする．ただし, 確率 p は n に依存しており, ある正の実数 $\lambda > 0$ を用いて, $np = \lambda$ と表される．このとき, 次式が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(S_n := X_1 + \cdots + X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{34}$$

証明　仮定より,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(S_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}\{p(n-\ell)\}(1-p)^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}\left\{np\left(1-\frac{\ell}{n}\right)\right\}(1-p)^{n-k}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+,
\end{aligned}$$

となり, これに $p=\lambda/n$ を代入すると,

$$\mathsf{P}(S_n=k)=\frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}\left\{\lambda\left(1-\frac{\ell}{n}\right)\right\}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}, \qquad k\in\mathbb{Z}_+, \tag{35}$$

となる. さらに

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{\ell=0}^{k-1}\left\{\lambda\left(1-\frac{\ell}{n}\right)\right\}=\lambda^k,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\lambda\cdot(1-k/n)n/\lambda}=\mathrm{e}^{\lambda},$$

が成り立つので, これらを用いて, 式(35)の両辺において, $n\to\infty$ の極限を取ると, 式(34)を得る. □

例 **3.11** 電話をかけようとする潜在的な客が n 人おり, 各客の振る舞いは独立であるとする. さらに, 一定時間内に各客が電話をかける確率を $p=\lambda/n$ とする. このとき, n が十分大きければ, 電話をかける客の総数の分布は, 率 λ のポアソン分布で近似できる.

4 ポアソン過程

4.1 計数過程と再生過程

計数過程とは, ある事象 (待ち行列モデルにおける到着など) がランダムな時間間隔で発生し続ける状況を数学的に表現した確率過程の一種である.

定義 4.1 (計数過程) $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ を非負確率変数列とする. さらに, 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して, $N(t)$ を次にように定義する.

$$N(t) = \sup\left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \sum_{k=1}^{n} X_k \le t\right\}. \tag{36}$$

つまり, $N(t)$ は時刻 t までに発生した事象の数に等しい. このとき, 確率過程 $\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ を計数過程とよぶ.

計数過程の定義は非常に一般的であるため, 待ち行列などの確率モデルの入力として用いるには, 解析しやすい性質 (仮定) を追加する必要がある.

定義 4.2 (再生過程) 事象の発生間隔の列 $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ が独立かつ同一に分布するとき, 計数過程 $\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ を再生過程とよび, $\{X_n\}$ を再生間隔とよぶ.

補題 4.1 再生間隔 $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ もつ再生過程 $\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ は, $\mathsf{E}[X_1] < \infty$ であるとき, 確率 1 で次式を満たす.

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty. \tag{37}$$

証明　まず,

$$\{N(t) = \infty\} \Longleftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \{N(t) \geq n\},$$

であることに注意する. ついで, $B_n = \{N(t) \geq n\}$ とおくと, $\{B_n; n \in \mathbb{N}\}$ は減少事象列である. したがって, 定理 3.4 を用いると, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N(t) = \infty) &= \mathsf{P}(\cap_{n=1}^{\infty}\{N(t) \geq n\}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(N(t) \geq n). \end{aligned} \tag{38}$$

ここで, 任意の$n \in \mathbb{N}$に対して, $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$とおくと, T_nはn番目の事象の発生時刻であり,

$$\{N(t) \geq n\} = \{T_n \leq t\},$$

が成り立つ. よって, 任意の$n \in \mathbb{N}$に対して, 次式を得る.

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(N(t) \geq n) = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(T_n \leq t) = 1 - \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(T_n > t). \tag{39}$$

さらに, $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$より,

$$\mathsf{P}(T_n > t) \leq \mathsf{P}(\cup_{i=1}^{n}\{X_i > t/n\}) \leq n\mathsf{P}(X_1 > t/n),$$

が成り立つので, これを式(39)に適用し,

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(N(t) \geq n) \geq 1 - n \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(X_1 > t/n), \tag{40}$$

を得る. また, $\int_0^\infty P(X_1 > x)\mathrm{d}x = \mathsf{E}[X_1] < \infty$より,

$$\lim_{x\to\infty} P(X_1 > x) = 0,$$

となるので, これと式(39)から,

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(N(t) \geq n) = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{41}$$

が導かれる. 最後に, 式(41)と(38)を合わせて, 式(37)を得る. $\square$

次の結果は再生過程に対する大数の強法則とよばれる基本定理である.

定理 4.2 再生間隔$\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$もつ再生過程$\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$は, $\mathsf{E}[X_1] < \infty$であるとき, 確率 1 で次式を満たす.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathsf{E}[X_1]}. \tag{42}$$

証明　任意の$n \in \mathbb{N}$に対して, $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$とおく. T_nはn番目の事象の発生時刻であり, $T_{N(t)} \le t < T_{N(t)} + 1$ を満たす. よって,

$$\frac{N(t)}{T_{N(t)}} \frac{T_{N(t)}}{T_{N(t)} + 1} \le \frac{N(t)}{t} < \frac{N(t)}{T_{N(t)}}, \tag{43}$$

となる. ここで, 大数の強法則より,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mathsf{E}[X_1], \quad a.s.,$$

が成り立つので, これと補題 4.1 の結果を合わせて, 次式を得る.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_{N(t)}}{N(t)} = \mathsf{E}[X_1], \quad a.s. \tag{44}$$

さらに, 式(44)を用いると, 不等式(43)の左辺と右辺は共に, 確率1で$1/\mathsf{E}[X_1]$に収束するので, はさみうちの原理より,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mathsf{E}[X_1]}, \quad a.s.,$$

が導かれる. □

定理 4.3 再生間隔$\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$もつ再生過程$\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$は, $\mathsf{E}[X_1] < \infty$であるとき, 次式を満たす.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}[N(t)]}{t} = \frac{1}{\mathsf{E}[X_1]}. \tag{45}$$

証明　再生過程$\{N(t)\}$は計数過程であるので, 計数過程の定義(定義 4.1)より,

$$\{N(t) + 1 \le n\} = \{N(t) \le n - 1\} \Longleftrightarrow \{T_n > t\}, \tag{46}$$

となる. また, $N(t) + 1$は, 再生時刻列$\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$に対する停止時刻である. よって, $t < T_{N(t)+1}$とWaldの補題(補題 6.10)を用いて, 次式を得る.

$$t < \mathsf{E}[T_{N(t)+1}] = \mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{N(t)+1} X_n\right] = \mathsf{E}[N(t)+1]\mathsf{E}[X_1]. \tag{47}$$

さらに式(47)を変形して,

$$\frac{\mathsf{E}[N(t)]}{t} > \frac{1}{\mathsf{E}[X_1]} - \frac{1}{t},$$

を得る. 上の不等式の両辺について, $t \to \infty$ としたときの下極限を取ると,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}[N(t)]}{t} \ge \frac{1}{\mathsf{E}[X_1]},$$

が成り立つ. したがって, 以下では, 次式を示す.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}[N(t)]}{t} \le \frac{1}{\mathsf{E}[X_1]}. \tag{48}$$

任意の $n \in \mathbb{N}$ と $\alpha \in \mathbb{R}_+$ に対して,

$$X_n^{(\alpha)} = \min(X_n, \alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+. \tag{49}$$

とおく. さらに, $\{X_n^{(\alpha)}; n \in \mathbb{M}\}$ を再生間隔とする再生過程を $\{N^{(\alpha)}(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ と定義する. すなわち,

$$N^{(\alpha)}(t) = \sup\left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} X_k^{(\alpha)} \le t \right\}, \tag{50}$$

とする.

式(49)より,

$$X_n^{(\alpha)} \leq X_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}_+,$$

となる. よって, 式(36)と(50)から,

$$N(t) \leq N^{(\alpha)}(t), \qquad t, \alpha \in \mathbb{R}_+,$$

が成り立つので,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}[N(t)]}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}[N^{(\alpha)}(t)]}{t}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+, \tag{51}$$

を得る.

つづいて, $\mathsf{E}[N^{(\alpha)}(t)]$を評価する. 式(50)と$X_n^{(\alpha)} \leq \alpha$から,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{N^{(\alpha)}(t)+1} X_n^{(\alpha)}\right] &= \mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{N^{(\alpha)}(t)} X_n^{(\alpha)}\right] + \mathsf{E}\left[X_{N^{(\alpha)}(t)+1}^{(\alpha)}\right] \\
&\leq t + \mathsf{E}\left[X_{N^{(\alpha)}(t)+1}^{(\alpha)}\right] \\
&\leq t + \alpha, \qquad t, \alpha \in \mathbb{R}_+,
\end{aligned} \tag{52}$$

となる. また, Waldの補題(補題 6.10)より,

$$\mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{N^{(\alpha)}(t)+1} X_n^{(\alpha)}\right] = (\mathsf{E}[N^{(\alpha)}(t)] + 1)\mathsf{E}[X_1^{(\alpha)}],$$

が成り立つので, これと式(52)を合わせると,

$$(\mathsf{E}[N^{(\alpha)}(t)] + 1)\mathsf{E}[X_1^{(\alpha)}] \leq t + \alpha, \qquad t, \alpha \in \mathbb{R}_+,$$

となって, 次の不等式を得る.

$$\frac{\mathsf{E}[N^{(\alpha)}(t)]}{t} \leq \frac{t+\alpha}{t} \frac{1}{\mathsf{E}[X_1^{(\alpha)}]} - \frac{1}{t}.$$

上の不等式の両辺について, $t \to \infty$ としたときの上極限を取ると,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}[N^{(\alpha)}(t)]}{t} \leq \frac{1}{\mathsf{E}[X_1^{(\alpha)}]},$$

が得られ, さらに, これを式(51)の右辺に代入すると,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\mathsf{E}[N(t)]}{t} \leq \frac{1}{\mathsf{E}[X_1^{(\alpha)}]}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}_+, \tag{53}$$

を得る. 最後に, $\alpha \uparrow \infty$ とすると, $\mathsf{E}[X_1^{(\alpha)}] \uparrow \mathsf{E}[X_1]$ となるので, 式(53)から式(48)が導かれる.

□

4.2　ポアソン過程の定義と性質

次のような条件を満たす計数過程 $\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ を考える.

条件 4.1

(i) $N(0) = 0$

(ii) 任意の $t, s \in \mathbb{R}_+$ および $k \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$\mathsf{P}(N(t+s) - N(s) = k) = \mathsf{P}(N(t) = k). \qquad \text{(定常増分性)}$$

(iii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の時刻列 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ に対して, $\{N(t_i) - N(t_{i-1}); i = 1, 2, \ldots, n\}$ が独立となる (独立増分性).

(iv) $\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ は各時刻において, 高々 1 増加する (単純性).

(v) $\lambda := \mathsf{E}[N(1)] \in (0, \infty)$

次の補題はポアソン過程(後述)の定義に関わる重要な結果である.

補題 4.4 計数過程 $\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ が条件 4.1 を満たすとき, $\{N(t)\}$ は再生過程となり, 再生間隔は率 λ の指数分布に従う. また, 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して, $N(t)$ は平均 λt のポアソン分布に従う. すなわち, 次式が成り立つ.

$$\mathsf{P}(N(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{54}$$

証明　まず, 最初の再生間隔 X_1 が指数分布に従うことを示す. 独立増分と定常性より, 任意の $t, s \in \mathbb{R}_+$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(X_1 > t + s) &= \mathsf{P}(N(t+s) = 0) \\
&= \mathsf{P}(N(s) = 0, N(t+s) - N(s) = 0) \\
&= \mathsf{P}(N(s) = 0)\mathsf{P}(N(t+s) - N(s) = 0) \\
&= \mathsf{P}(N(s) = 0)\mathsf{P}(N(t) = 0) \\
&= \mathsf{P}(X_1 > s)\mathsf{P}(X_1 > t),
\end{aligned}$$

となる. さらに, 条件 (iv) より, $\mathsf{P}(X_1 = 0) = 0$, すなわち, $\mathsf{P}(X_1 > 0) = 1$ である.

したがって, 補題 3.15 より, ある正定数 α が存在して,

$$\mathsf{P}(X_1 > t) = 1 - e^{-\alpha t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{55}$$

が成り立つ. つまり, X_1 は率 α の指数分布に従う.

次に, X_2 が X_1 とは独立で, かつ, 率 α の指数分布に従うことを示す. 式(55) ならびに独立増分と定常性を用いると, 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(X_2 \le x_2, X_1 \le x_1) \\
&\quad = \int_0^{x_1} \mathsf{P}(X_2 \le x_2 \mid X_1 = u)\mathsf{P}(X_1 \in (u, u + \mathrm{d}u]) \\
&\quad = \int_0^{x_1} \mathsf{P}(X_2 \le x_2 \mid X_1 = u)\alpha e^{-\alpha u}\mathrm{d}u \\
&\quad = \int_0^{x_1} \mathsf{P}(N(u + x_2) - N(u) \ge 1 \mid N(u) = 1 > N(u-))\alpha e^{-\alpha u}\mathrm{d}u \\
&\quad = \mathsf{P}(N(x_2) \ge 1) \int_0^{x_1} \alpha e^{-\alpha u}\mathrm{d}u = \mathsf{P}(X_1 \le x_2) \int_0^{x_1} \alpha e^{-\alpha u}\mathrm{d}u \\
&\quad = \mathsf{P}(X_1 \le x_2)\mathsf{P}(X_1 \le x_1),
\end{aligned} \tag{56}$$

が得られる.

ここで, 式(56)において, $x_1 \to \infty$とすると,

$$\mathsf{P}(X_2 \le x_2) = \mathsf{P}(X_1 \le x_2), \qquad x_2 \in \mathbb{R}_+,$$

となるので, これを式(56)に代入し,

$$\mathsf{P}(X_2 \le x_2, X_1 \le x_1) = \mathsf{P}(X_2 \le x_2)\mathsf{P}(X_1 \le x_1), \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+,$$

が成り立つ. したがって, X_1, X_2は独立であり, 同じ分布に従う.

上と同様の議論を繰り返して, 再生間隔$\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$が独立でかつ, 同一の率$\alpha$の指数分布に従うことが示される. よって, 以下では, $\alpha = \lambda$を示す. まず, $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$が, パラメータαのn次アーラン分布に従うことから,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(N(t) \ge n) &= \mathsf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \le t) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^i}{i!} \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^i}{i!}, \qquad (57)\end{aligned}$$

となる. さらに, 式(57)を用いて, 次のように計算できる.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}[N(t)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(N(t) \ge n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^i}{i!} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^i}{i!} \sum_{n=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{\infty} i e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^i}{i!} \\
&= \alpha t.
\end{aligned}
$$

上の式と条件(v)より, $\alpha = \lambda$となる. □

定義 4.3 再生間隔$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$が率$\lambda$の指数分布に従うとき, すなわち,

$$
\mathsf{P}(X_n \le x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+, \tag{58}
$$

であるとき, その計数過程$\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$を率$\lambda$のポアソン過程とよぶ.

定義4.3と補題4.4から, 直ちに次の結果を得る.

定理 4.5 条件 4.1を満たす計数過程$\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$はポアソン過程である.

さらに, 補題 4.4とポアソン過程の定常性から次の結果が得られる.

系 4.6 ポアソン過程$\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$は次式を満たす.

$$\mathsf{P}(N(t+s) - N(s) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad t, s \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{59}$$

注意 4.1 ポアソン過程では, 時間区間$(s, t+s]$で発生する再生数は, その時間幅tだけに依存し,平均λtのポアソン分布に従う.

定理 4.7 再生間隔$\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$を持つ率$\lambda$のポアソン過程$\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$を考える. $T_n = \sum_{\ell=1}^n X_\ell$とおくと, 次式を満たす.

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(\cap_{k=1}^n \{T_k \in (t_k, t_k + \Delta t_k]\} \mid N(t) = n) \\ &= n! \frac{\Delta t_1}{t} \frac{\Delta t_2}{t} \cdots \frac{\Delta t_n}{t}. \end{aligned} \tag{60}$$

ただし, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$とし, $\max_{k \in \{1,2,\dots,n\}} \Delta t_k > 0$は十分小さいものとする.

証明　任意の$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}_+$に対して, $N(\mathbb{A})$を時間区間$\mathbb{A}$における事象の発生するとする. さらに, 時間区間$\mathbb{I}_k := (t_k, t_k + \Delta t_k]$ ($k = 1, 2, \ldots, n$)が互いに共通部分を持たないように, Δt_kを十分小さく取る. このとき, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(\cap_{k=1}^{n}\{T_k \in (t_k, t_k + \Delta t_k]\}, N(t) = n) \\
&\quad = \mathsf{P}(\cap_{k=1}^{n}\{N(\mathbb{I}_k) = 1\} \cap \{N((0,t] \setminus \cup_{\ell=1}^{n}\mathbb{I}_\ell) = 0\}) \\
&\quad = \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(N(\mathbb{I}_k) = 1)\mathsf{P}(N((0,t] \setminus \cup_{\ell=1}^{n}\mathbb{I}_\ell) = 0).
\end{aligned} \tag{61}$$

ただし, 2つ目の等号は独立増分性による. また, 定常増分性と式(59)から,

$$\mathsf{P}(N(\mathbb{I}_k) = 1) = (\lambda \Delta t_k)e^{-\lambda \Delta t_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\mathsf{P}(N((0,t] \setminus \cup_{\ell=1}^{n}\mathbb{I}_\ell) = 0) = e^{-\lambda(t - \Delta t_1 - \cdots - \Delta t_n)}$$

となるので, これらを式(61)に代入すると,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(\cap_{k=1}^{n}\{T_k \in (t_k, t_k + \Delta t_k]\}, N(t) = n) \\
&\quad = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} \Delta t_k e^{-\lambda \Delta t_k} \cdot e^{-\lambda(t - \Delta t_1 - \cdots - \Delta t_n)} = \lambda^n e^{-\lambda t} \prod_{k=1}^{n} \Delta t_k,
\end{aligned} \tag{62}$$

を得る. さらに, 式(62)と(54)を合わせると, 以下のように, 式(60)が導かれる.

$$\begin{aligned}&\mathsf{P}(\cap_{k=1}^{n}\{T_k \in (t_k, t_k + \Delta t_k]\} \mid N(t) = n)\\&= \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}\prod_{k=1}^{n}\Delta t_k}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!} = n!\prod_{k=1}^{n}\frac{\Delta t_k}{t}.\end{aligned}$$

□

定理 4.7 から次の結果を得る.

定理 4.8 $U_1, U_2, \ldots, U_n$ を区間 $(0, t)$ に一様に分布する独立な確率変数とし, それらを昇順に並べた順序統計量を $V_1, V_2, \ldots, V_n$ とする. 事象 $\{N(t) = n\}$ が起こったという条件のもとでは, 確率変数ベクトル $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ と $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ は同じ分布に従う.

証明 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$ とすると, 一様分布の定義から,

$$\mathsf{P}(\cap_{k=1}^{n}\{U_k \in (t_k, t_k + \Delta t_k])= \frac{\Delta t_1}{t}\frac{\Delta t_2}{t}\cdots\frac{\Delta u_n}{t},$$

が成り立つ. これよりさらに, 次式を得る.

$$\mathsf{P}(\cap_{k=1}^{n}\{V_k \in (t_k, t_k + \Delta t_k])= n!\frac{\Delta t_1}{t}\frac{\Delta t_2}{t}\cdots\frac{\Delta t_n}{t}t. \tag{63}$$

よって, 式(60) と(63) から, $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ の結合密度関数と, $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ の結合密度関数は同一であることが示される. □

4.3　平衡確率変数

定義 4.4　X を有限かつ正の期待値をもつ非負確率変数とし, F をその分布関数とする. このとき, 次式で定義される関数 F_{e} を, X および分布 F に関する平衡分布 (残余寿命分布) と呼ぶ.

$$F_{\mathrm{e}}(x) = \frac{1}{\mathsf{E}[X]} \int_0^x (1 - F(y))\mathrm{d}y = \frac{\mathsf{E}[\min(X, x)]}{\mathsf{E}[X]}, \quad x \in \mathbb{R}_+. \tag{64}$$

また, X と同じ確率空間上で定義された確率変数で, 分布 F_{e} に従うものを, X の平衡確率変数 (残余寿命確率変数) と呼ぶ.

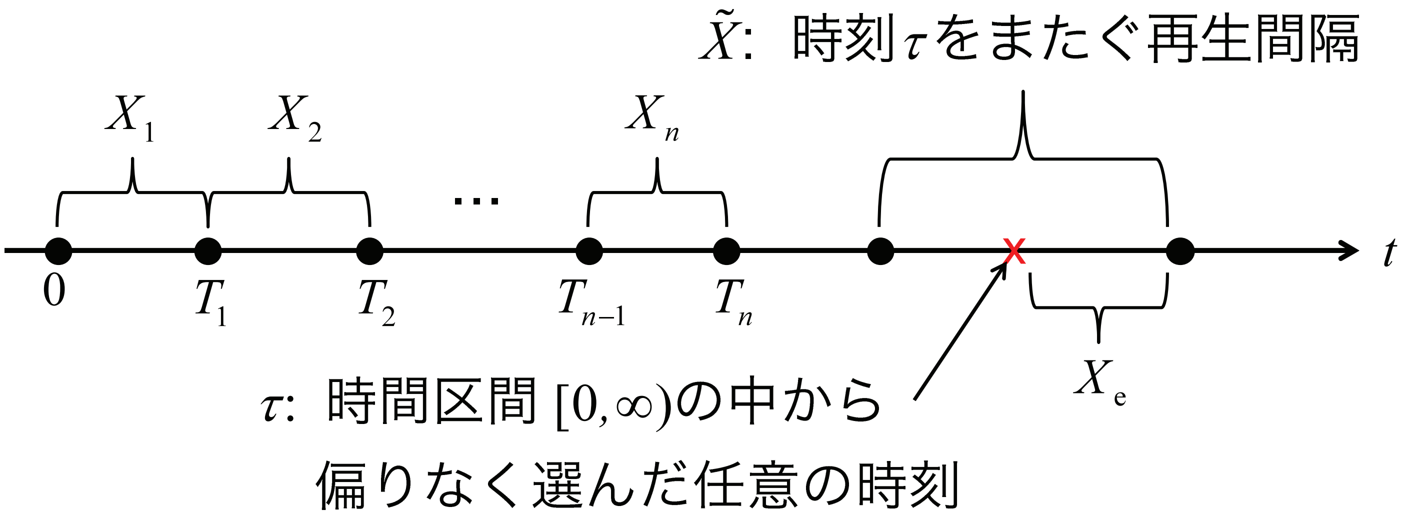
例 4.1　式 (64) より, 平衡分布 F_{e} の補分布関数 $\overline{F}_{\mathrm{e}}$ は次式を満たす.

$$\overline{F}_{\mathrm{e}}(x) = 1 - F_{\mathrm{e}}(x) = \frac{\mathsf{E}[\max(X - x, 0)]}{\mathsf{E}[X]}.$$

例 4.2　率 μ の指数分布 F の平衡分布 F_{e} は, F と同一である.

4.4 平衡確率変数の意味

再生過程を考え, その再生間隔の列 $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ が従う分布を F とする.



一様かつランダムに選んだ点が長さ x の再生間隔に含まれる確率は, その長さ自身と, 長さ x の再生間隔の発生確率に比例する.

$$\mathsf{P}(x < \widetilde{X} \le x + \mathrm{d}x) = \frac{x\mathrm{d}F(x)}{\mathsf{E}[X]}. \tag{65}$$

したがって, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(y < X_e \le y + \mathrm{d}y) &= \int_y^\infty \mathsf{P}(x < \widetilde{X} \le x + \mathrm{d}x)\frac{\mathrm{d}y}{x} \\ &= \int_y^\infty \frac{x\mathrm{d}F(x)}{\mathsf{E}[X]}\frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{1 - F(y)}{\mathsf{E}[X]}\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{66}$$

式 (66) より, 次の結果が導かれる.

命題 4.9

(i) X_{e} の LST $\widetilde{F}_{\mathrm{e}}(s)$ は, X の LST $\widetilde{F}(s)$ を用いて, 次式で与えられる.

$$\widetilde{F}_{\mathrm{e}}(s) \triangleq \mathsf{E}[e^{-sX_{\mathrm{e}}}] = \frac{1-\widetilde{F}(s)}{s\mathsf{E}[X]}.$$

(ii) $\mathsf{E}[X^{n+1}] < \infty$ ($n = 1, 2, \ldots$) のとき,

$$\mathsf{E}[X_{\mathrm{e}}^{n}] = \frac{\mathsf{E}[X^{n+1}]}{(n+1)\mathsf{E}[X]}.$$

4.5 指数分布の無記憶性

非負確率変数 X が率 μ の指数分布に従うとする.

$$\mathsf{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\mu x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

このとき, 任意の $x, t \geq 0$ に対して, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X > t + x \mid X > t) &= \frac{\mathsf{P}(X > t + x, X > t)}{\mathsf{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathsf{P}(X > t + x)}{\mathsf{P}(X > t)} = \frac{e^{-\mu(t+x)}}{e^{-\mu t}} \\ &= e^{-\mu x} = \mathsf{P}(X > x).\end{aligned} \tag{67}$$

ここで, X をある客のサービス時間だとすると,

式(67) は, 「サービス時間が t 以上である」という条件の下で, 「さらにサービス時間が x 以上継続する」という事象の発生確率が, 「サービス時間が x 以上である」という事象の発生確率と等しいことを表している. つまり, 時刻0 から t までの観測結果が, サービス時間 X の残余時間に影響を与えないことを意味している.

さらに, 式(67)より,

$$\mathsf{P}(X \le t + \Delta t \mid X > t) = 1 - e^{-\mu\Delta t} = \mu\Delta t + o(\Delta t),$$

となる. よって, サービス時間がt以上であるとき, 微小時間$(t, t + \Delta t]$でサービスが終了する確率は, $\mu\Delta t + o(\Delta t)$である.

4.6 ポアソン到着が観測するシステムの状態

- $N(t,u]$ ($0 \le t < u$): 時間区間 $(t,u]$ における客の到着数
- $D(t,u]$ ($0 \le t < u$): 時間区間 $(t,u]$ における客の退去数
- $L(t)$ ($t \in \mathbb{R}_+$): 時刻 t での系内客数

$$L(t) = L(0) + N(0,t] - D(0,t], \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

- $p_k(t)$ ($t \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{Z}_+$): 時刻 t の直後に到着する客が $\{L(t) = k\}$ を観測する確率

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\mathsf{P}(L(t) = k, N(t, t+\Delta t] \ge 1)}{\mathsf{P}(N(t, t+\Delta t] \ge 1)} \\ &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\mathsf{P}(N(t, t+\Delta t] \ge 1 \mid L(t) = k)}{\mathsf{P}(N(t, t+\Delta t] \ge 1)} \mathsf{P}(L(t) = k). \end{aligned} \tag{68}$$

定義より, $L(t)$ は時刻 t 以前の到着にのみ依存するので, ポアソン到着過程の独立増分性より, $N(t,t+\Delta t]$ と $L(t)$ は独立である. また, 一定到着率の仮定より,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(N(t, t+\Delta t] \ge 1 \mid L(t) = k) &= \mathsf{P}(N(t, t+\Delta t] \ge 1) \\ &= \lambda \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \tag{69}$$

となるので, 式(69) を式(68) に代入し, 次式を得る.

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\lambda \Delta t + o(\Delta t)}{\lambda \Delta t + o(\Delta t)} \mathsf{P}(L(t) = k) \\ &= \mathsf{P}(L(t) = k), \qquad t \in \mathbb{R}_+,\ k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

ポアソン到着する客が観測する系内客数過程 $\{L(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ の状態は, 外部の観測者がみる $\{L(t)\}$ の状態と同じである.

4.7 PASTA (Poisson Arrivals See Time Averages)

条件 4.2

(i) $\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ を, 時間区間 $[0, t]$ に発生する到着数とし, $N(0) = 0$ を仮定する. また,

$$N(t, u) = N(u) - N(t), \qquad 0 \le u \le t,$$

と定義しておく. さらに, t_n ($n \in \mathbb{N}$) を, n 番目の到着時刻とし,

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$$

とする.

(ii) $\{X(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ を, 集合 $\mathcal{D}$ 上の確率過程とする.

(iii) 確率過程 $\{N(t)\}$ は, 右連続で左極限をもつものとする.

(iv) $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ を有界な関数とする.

$$\sup_{x \in \mathcal{D}} |f(x)| < M. \tag{70}$$

さらに, $\{f(X(t)); t \in \mathbb{R}_+\}$ も, 左連続で右極限をもつものとする.

- $\{f(X(t))\}$ の左連続性の仮定は, 到着直前に着目することによる.

次の条件を仮定する.

条件 4.3

(i) u_0 をある正の実数とし, 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ と $u \in [0, u_0]$ に対して,

$$\mathsf{E}[f(X(t))N(t, t+u)] = \mathsf{E}[f(X(t))]\mathsf{E}[N(t, t+u)], \tag{71}$$

$$\mathsf{E}[N(t, t+u)] = \lambda u. \tag{72}$$

(ii) 確率 1 で, $\lim_{t \to 0} N(t)/t = \lambda$ が成り立つ.

注意 4.2 式 (71) は, 時刻 t でのシステムの状態 $X(t)$ と, 時間区間 $(t, t+u]$ における到着が独立であることを意味している.

定理 4.10 条件 4.2, 4.3 の下で, 次式が成り立つ.

$$\lim_{t \to \infty} \mathsf{E}\left[\frac{1}{N(t)} \sum_{\ell=1}^{N(t)} f(X(t_\ell))\right] = \lim_{t \to \infty} \mathsf{E}\left[\frac{1}{t} \int_0^t f(X(s))\mathrm{d}s\right]. \tag{73}$$

注意 4.3 式 (73) の左辺は, システムの状態の関数 f による写像についての到着直前時の客平均であり，右辺は同写像に関する時間平均である.

証明　表記を簡単にするため, $G(t)=f(X(t))$ とおくと, 式(70) より,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|G(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}|f(X(t))| < M, \tag{74}$$

となる. また,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N(t)} G(t_k) &= \int_0^t G(s)\mathrm{d}N(s)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{kt}{n}\right)\left\{N\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) - N\left(\frac{kt}{n}\right)\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{kt}{n}\right) N\left(\frac{kt}{n}, \frac{(k+1)t}{n}\right),\end{aligned}$$

が成り立つので, これより, 次式を得る.

$$\mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} G(t_k)\right] = \mathsf{E}\left[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{kt}{n}\right) N\left(\frac{kt}{n}, \frac{(k+1)t}{n}\right)\right]. \tag{75}$$

ここで, 条件(i)と式(74)から,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{kt}{n}\right) N\left(\frac{kt}{n}, \frac{(k+1)t}{n}\right) \\
&\quad \le \sup_{0\le s\le t} |G(s)| \sum_{k=0}^{n-1} N\left(\frac{kt}{n}, \frac{(k+1)t}{n}\right) \\
&\quad = \sup_{0\le s\le t} |G(s)| N(t) < \infty,
\end{aligned}
$$

となる. よって, 優収束定理から, 式(75)の右辺のnに関する極限を期待値の外に出すことができ, さらに, 条件(ii)の式(71)と(72)を用いると, 次のようになる.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} G(t_k)\right] &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{E}\left[G\left(\frac{kt}{n}\right) N\left(\frac{kt}{n}, \frac{(k+1)t}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{E}\left[G\left(\frac{kt}{n}\right)\right] \mathsf{E}\left[N\left(\frac{kt}{n}, \frac{(k+1)t}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[N(0, t/n)\right] \sum_{k=0}^{n-1} \mathsf{E}\left[G\left(\frac{kt}{n}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} (t/n)^{-1} \mathsf{E}\left[N(0,t/n)\right] \mathsf{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{kt}{n}\right)\right] \frac{t}{n} \\
&= \lambda \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{kt}{n}\right) \frac{t}{n}\right]. \qquad (76)
\end{aligned}
$$

ここで, 式(74) より,

$$
\left|\sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{kt}{n}\right) \frac{t}{n}\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \left|G\left(\frac{kt}{n}\right) \frac{t}{n}\right| \le Mt,
$$

となるので, 優収束定理を用いて,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{kt}{n}\right) \frac{t}{n}\right] &= \mathsf{E}\left[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} G\left(\frac{kt}{n}\right) \frac{t}{n}\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\int_0^t G(s)\mathrm{d}s\right],
\end{aligned}
$$

を得る. さらに, これを式(76) に代入すると, 次式が導かれる.

$$
\mathsf{E}\left[\sum_{k=1}^{N(t)} G(t_k)\right] = \lambda \mathsf{E}\left[\int_0^t G(s)\mathrm{d}s\right]. \qquad (77)
$$

ところで, 条件(iii) から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $t > 0$ を十分大きく取ると,

$$(\lambda - \varepsilon)t \le N(t) \le (\lambda + \varepsilon)t \quad \text{w.p.1},$$

とすることができる. この不等式と式(77) から, 十分大きな $t > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon}\mathsf{E}\left[\frac{1}{t}\int_0^t G(s)\mathrm{d}s\right] &\le \mathsf{E}\left[\frac{1}{N(t)}\sum_{k=1}^{N(t)} G(t_k)\right] \\ &\le \frac{\lambda}{\lambda-\varepsilon}\mathsf{E}\left[\frac{1}{t}\int_0^t G(s)\mathrm{d}s\right] \quad \text{w.p.1},\end{aligned}$$

が成り立つので, $t \to \infty$ としたのち, $\varepsilon \downarrow 0$ とすると,

$$\lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\left[\frac{1}{N(t)}\sum_{k=1}^{N(t)} G(t_k)\right] = \lim_{t\to\infty}\mathsf{E}\left[\frac{1}{t}\int_0^t G(s)\mathrm{d}s\right] \quad \text{w.p.1},$$

を得る. よって, 式(73) が成り立つことが示された.

$\square$

5　一般的な待ち行列に対して成り立つ結果

- 到着率と退去率の関係

  各客の平均滞在時間が有限であるとき,

$$\text{到着率} = \text{退去率}$$

- 到着直前と退去直後の系内客数分布の関係

  単純待ち行列では,

$$\text{到着直前の系内客数分布} = \text{退去直後の系内客数分布}$$

- リトルの公式

  各客の平均滞在時間が有限であるとき,

$$\text{平均系内客数} = \text{到着率} \times \text{平均滞在時間}$$

(i) 証明

(ii) 拡張版リトルの公式

5.1 到着率と退去率の関係

5.1.1 記号の定義

- a_n: n番目の到着時刻 (以下, $a_0 = 0$とする)
- U_n: n番目(時刻a_n)に到着した客の系内滞在時間
- d_n: n番目に到着した客の退去時刻 (以下, $d_0 = 0$とする)

$$d_n = a_n + U_n$$

- $L(t)$: 時刻tでの系内客数
- $L(a_n-)$: n番目に到着した客の到着直前の系内客数

$$L(a_n-) = \lim_{t \uparrow a_n} L(t)$$

- $L(d_n+)$: n番目に到着した客の退去直後の系内客数

$$L(d_n+) = \lim_{t \downarrow d_n} L(t)$$

- $A(t) = \sup\{n \in \mathbb{Z}_+; a_n \le t\}$: 時間区間$(0, t]$での累積到着数
- $D(t) = \sup\{n \in \mathbb{Z}_+; d_n \le t\}$: 時間区間$(0, t]$での累積退去数

補題 5.1 極限 $\lambda := \lim_{t\to\infty} A(t)/t$ が存在し, それが有限であるとき, 次式が成り立つ.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}. \tag{78}$$

証明　まず, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示す. $\lambda = \lim_{t\to\infty} A(t)/t$ より, 任意の $\delta > 0$ に対して, ある $T_\delta > 0$ が存在し,

$$A(t) < (\lambda + \delta)t, \qquad \forall t > T_\delta, \tag{79}$$

となる. ここで, 仮に $a_* := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$ とすると, $A(t)$ は非減少であるので,

$$A(t) \ge A(a_*) = \sup\{n \in \mathbb{Z}_+; a_n \le a_*\} = \infty, \qquad \forall t \ge a_*,$$

となり, 式 (79) と矛盾する. よって, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

以下, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を用いて式 (78) を示す. 定義より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次式が成り立つことに注意する.

$$A(a_n - \varepsilon) < n \le A(a_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

両辺をa_nで割ると,

$$\frac{A(a_n-\varepsilon)}{a_n-\varepsilon}\frac{a_n-\varepsilon}{a_n} < \frac{n}{a_n} \le \frac{A(a_n)}{a_n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

となる. さらに, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$と$\lambda = \lim_{t\to\infty} A(t)/t$より,

$$\lim_{a_n\to\infty} \frac{A(a_n)}{a_n} = \lambda,$$

$$\lim_{a_n\to\infty} \frac{A(a_n-\varepsilon)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A(a_n-\varepsilon)}{a_n-\varepsilon}\frac{a_n-\varepsilon}{a_n} = \lambda,$$

が成り立つので, はさみうちの原理より, 次式が導かれる.

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}.$$

□

定理 5.2 2つの条件

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} \in (0,\infty), \tag{80}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{n} = 0, \tag{81}$$

が満たされているとき, 次式が成り立つ.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t} = \lambda.$$

定理 5.2の証明　式(81)と $d_n = a_n + U_n$ より,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}.$$

さらに, 式(80)が成り立つと仮定しているので, 補題 5.1を適用し,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lambda^{-1} \in (0,\infty), \tag{82}$$

を得る. これより, $\lim_{n\to\infty} d_n = \infty$である. この結果と

$$D(d_n) = \sup\{m \in \mathbb{Z}_+; d_m \le d_n\} \ge n,$$

を用いて, $\lim_{t\to\infty} D(t) = \infty$ が導かれる. したがって, 式(82)から,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{d_{D(t)}} = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)+1}{d_{D(t)+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{d_n} = \lambda \in (0, \infty), \tag{83}$$

となる. ここで, $d_{D(t)} \leq t < d_{D(t)+1}$ より,

$$\frac{D(t)}{D(t)+1} \frac{D(t)+1}{d_{D(t)+1}} < \frac{D(t)}{t} \leq \frac{D(t)}{d_{D(t)}}.$$

となるので, $t \to \infty$ とすれば, はさみうちの原理より, 次式を得る.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t} = \lambda.$$

□

5.1.3 到着率と退去率の関係: 有限容量の場合

システム容量 N の待ち行列を考える.

- $A(t)$, $D(t)$: 時刻 t までの到着総数, 退去総数
- a_n, d_n: n 番目の到着時刻, 退去時刻
- $a_n^{(N)}$: システムに収容される n 番目の到着時刻

$$a_n^{(N)} = \inf\{a_m > a_{n-1}^{(N)} : L(a_m-) \le N-1\}$$

到着直前の系内客数が $N-1$ 以下でないと, システムに収容されない

- $A^{(N)}(t)$: 時刻 t までにシステムに収容された到着数

$$\begin{aligned} A^{(N)}(t) &= \sup\{n \in \mathbb{Z}_+; a_n^{(N)} \le t\} \\ &= \sup\{n \in \mathbb{Z}_+; a_n \le t, L(a_n-) \le N-1\} \le A(t) \end{aligned} \tag{84}$$

- 次の極限が存在するとき, その極限を呼損率, あるいは棄却率と呼ぶ.

$$P_{\mathrm{loss}}^{(N)} := \lim_{t\to\infty} \frac{A(t) - A^{(N)}(t)}{A(t)}$$

補題 5.3 システムの容量を $N \in (0, \infty)$ とし, 定理 5.2の2つの条件(80)と(81)が成り立っていると仮定する. さらに,

$$P_{\mathrm{loss}}^{(N)} = \lim_{t\to\infty} \frac{A(t) - A^{(N)}(t)}{A(t)} \in (0,1), \tag{85}$$

が満たされるとき, 次式が成立する.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A^{(N)}(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n^{(N)}} = (1 - P_{\mathrm{loss}}^{(N)})\lambda. \tag{86}$$

証明　式(80)と(85)より,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A^{(N)}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{A(t) - A^{(N)}(t)}{A(t)}\right) \frac{A(t)}{t} = (1 - P_{\mathrm{loss}}^{(N)})\lambda,$$

を得る. 以下, 補題5.1の証明において, λ, a_n, $A(t)$ の代わりにそれぞれ $(1 - P_{\mathrm{loss}}^{(N)})\lambda$, $a_n^{(N)}$, $A^{(N)}(t)$ とすれば, 式(86)が示される. □

定理 5.4 補題 5.3の条件が満たされるとき, 次式が成立する.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{A^{(N)}(t)}{t}=(1-P_{\rm loss}^{(N)})\lambda. \tag{87}$$

定理 5.4の証明 まず,

$$\lim_{n\to\infty}U_n/n=0,$$

が成り立つことに注意する(定理 5.2の証明, 式(81)参照). さらに, $U_n=d_n-a_n^{(N)}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$が成り立つ(無限容量の場合は$U_n=d_n-a_n$)ので, これらの事実と補題 5.3を用いて,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{U_n+a_n^{(N)}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{(N)}}{n}\\&=\frac{1}{(1-P_{\rm loss}^{(N)})\lambda}\in(0,\infty).\end{aligned} \tag{88}$$

以下, 定理 5.2の証明と同様にして(87)を示すことができる. □

5.2　到着直前と退去直後の系内客数分布の関係

5.2.1　単純待ち行列の仮定

以下の条件を満たす待ち行列を「単純待ち行列」と呼ぶ.

(i) サーバ群の最大サービス率 $c_{\max}$ は有限

- システム全体としての処理能力が有限である

(ii) サービスを待っている客がいるとき,

$$\text{システムの実効サービス率} = \text{最大サービス率}\, c_{\max}$$

- サーバは「さぼらない」

(iii) システムに入った客はサービス完了前に退去しない

- サービスを待っている間やサービス中には退去しない
- 待合室が有限のモデルでは, 待合室に空きがなければシステムに入れない

以下では, 単純待ち行列のみを考えるため, 「単純」は省略する場合がある.

5.2.2　到着直前と退去直後の系内容数分布の同一性: 無限容量の場合

定理 5.5　無限容量をもつ単純待ち行列において, 到着と退去が1つずつ発生し, 定理 5.2の2つの条件(80)と(81)を仮定する．このとき, 任意の$k \in \mathbb{Z}_+$に対して,

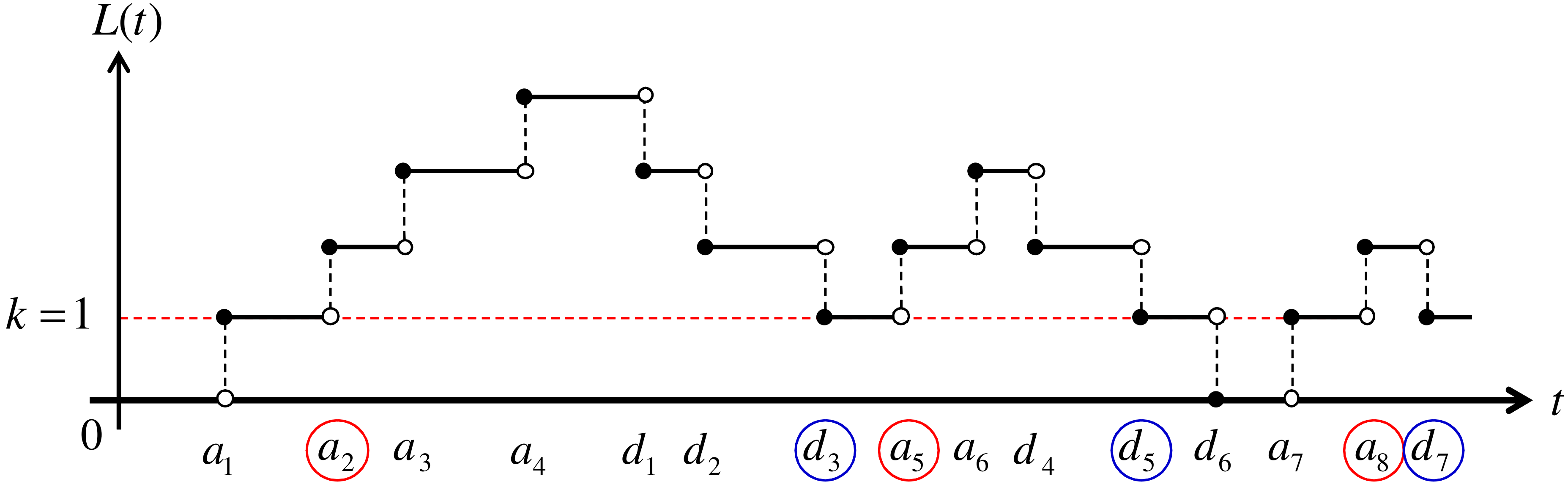
$$p^{\mathrm{A}}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}(L(a_m-) = k),$$

$$p^{\mathrm{D}}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}(L(d_m+) = k),$$

が存在し, それが有限であるとすると, 次が成り立つ.

$$p^{\mathrm{A}}(k) = p^{\mathrm{D}}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

定理 5.5 の証明　到着と退去が一人ずつ発生するので, $L(t)$ が k から $k+1$ に変化する時刻と $k+1$ から k に変化する時刻は交互に現れる.



よって, $|A_k(t) - D_k(t)| \le 1$ $(\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \forall k \in \mathbb{Z}_+)$ となる.

- $A_k(t) = \sum_{m=1}^{A(t)} \mathbb{1}(L(a_m-) = k)$: 時刻 t までに, 到着直前の系内客数が k に等しくなった回数
- $D_k(t) = \sum_{m=1}^{D(t)} \mathbb{1}(L(d_m+) = k)$: 時刻 t までに, 退去直後の系内客数が k に等しくなった回数

さて, 定理 5.2 より (到着率と退去率が等しい),

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t} = \lambda \in (0,\infty), \tag{89}$$

が成り立つので,

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} D(t) = \infty, \tag{90}$$

となる. よって, 式(90) と, $p^{\mathrm{A}}(k)$, $p^{\mathrm{D}}(k)$, $A_k(t)$, $D_k(t)$ の定義を用いて,

$$p^{\mathrm{A}}(k) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{A(t)} \sum_{m=1}^{A(t)} \mathbb{1}(L(a_m-) = k) = \lim_{t\to\infty} \frac{A_k(t)}{A(t)},$$

$$p^{\mathrm{D}}(k) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{m=1}^{D(t)} \mathbb{1}(L(d_m+) = k) = \lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t)}{D(t)},$$

が得られる.

さらに, 式(89)と, $|A_k(t)-D_k(t)|\le 1$, $\lim_{t\to\infty}D(t)=\infty$ を用いると,

$$
\begin{aligned}
p^{\mathrm{A}}(k) &= \lim_{t\to\infty}\frac{A_k(t)}{A(t)}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{A_k(t)}{D(t)}\frac{D(t)}{A(t)}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{D_k(t)+(A_k(t)-D_k(t))}{D(t)}\frac{D(t)}{A(t)}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{D_k(t)}{D(t)}\frac{D(t)}{A(t)}\\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{D_k(t)}{D(t)}\\
&= p^{\mathrm{D}}(k),
\end{aligned}
$$

となり, 本定理は示された. □

定理 5.6 補題 5.3の条件が満たされていると仮定する．このとき，任意の $k = 0, 1, \ldots, N-1$ に対して，

$$p^{\mathrm{A}}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}(L(a_m-) = k)}{\sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}(L(a_m-) < N)}$$

$$p^{\mathrm{D}}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}(L(d_m+) = k)$$

が存在し，かつ，有限であるなら，次式が成り立つ．

$$p^{\mathrm{A}}(k) = p^{\mathrm{D}}(k), \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

注意 5.1 $\{p^{\mathrm{A}}(k)\}$ はシステムに収容される客が見る系内客数分布である．

定理 5.6 の証明

定理 5.4 より (退去率はシステムに収容される到着率に等しい),

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A^{(N)}(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{t}$$
$$=(1-P_{\mathrm{loss}}^{(N)})\lambda\in(0,\infty). \tag{91}$$

さらに, 式 (91) と $A^{(N)}(t)\le A(t)$ より, 次式を得る.

$$\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{t\to\infty}A^{(N)}(t)=\lim_{t\to\infty}D(t)=\infty. \tag{92}$$

ここで, $A_k(t)$ と $D_k(t)$ をそれぞれ,

- $A_k(t)=\sum_{m=1}^{A(t)}\mathbb{1}(L(a_m-)=k)$: 時刻 t までに, 到着直前の系内客数が k に等しくなった回数,
- $D_k(t)=\sum_{m=1}^{D(t)}\mathbb{1}(L(d_m+)=k)$: 時刻 t までに, 退去直後の系内客数が k に等しくなった回数

とおく.

このとき, $p^{\mathrm{D}}(k)$ の定義から,

$$p^{\mathrm{D}}(k) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{m=1}^{D(t)} \mathbb{1}(L(d_m+) = k) = \lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t)}{D(t)}. \tag{93}$$

を得る. さらに,

$$A(k) = \sum_{m=1}^{A(t)} \mathbb{1}(L(a_m-) = k),$$

$$A^{(N)}(t) = \sum_{m=1}^{A(t)} \mathbb{1}(L(a_m-) \leq N-1),$$

を用いて, 次式を得ることができる.

$$p^{\mathrm{A}}(k) = \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^{A(t)} \mathbb{1}(L(a_m-) = k)}{\sum_{m=1}^{A(t)} \mathbb{1}(L(a_m-) < N)} = \lim_{t\to\infty} \frac{A_k(t)}{A^{(N)}(t)}. \tag{94}$$

ここで, $0 \leq k < N$ のとき,

$$|A_k(t) - D_k(t)| \leq 1, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

となることに注意し, 式(93) および (94) を用いると,

$$
\begin{aligned}
p^{\mathrm{A}}(k) &= \lim_{t\to\infty} \frac{A_k(t)}{A^{(N)}(t)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t) + (A_k(t) - D_k(t))}{D(t)} \frac{D(t)}{A^{(N)}(t)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t)}{D(t)} \frac{D(t)}{A^{(N)}(t)} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t)}{D(t)} \\
&= p^{\mathrm{D}}(k),
\end{aligned}
$$

が得られ, 本定理は示された. □

5.3 リトルの公式

- $L(t)$: 時刻tにおける系内客数
  - 時刻0でシステムにいる客には1から順に$L(0)$まで番号を割り当てる
  - 時刻0以降に到着する客には, 到着順に$L(0)+1, L(0)+2, \ldots$ のように番号を割り当てる.
- a_n: 客nの到着時刻
  - 時刻0でシステムにいる客の到着時刻は0とする

$$a_n = 0, \ \forall n \le L(0)$$

- d_n: 客nの退去時刻
- $U_n = d_n - a_n$: 客nの系内滞在時間
- $A(t) = \sup\{n \in \mathbb{Z}_+; a_n \le t\}$: 時刻$t$までの累積到着数
- $D(t) = \sup\{n \in \mathbb{Z}_+; d_n \le t\}$: 時刻$t$までの累積退去数

$$L(t) = \sum_{n=1}^{A(t)} \mathbb{1}(a_n \le t < d_n), \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{95}$$

定理 5.7 (リトルの公式) $L(0) < \infty$ および $\lambda := \lim_{t\to\infty} A(t)/t \in (0,\infty)$ を仮定する. このとき

$$\breve{U} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i < \infty, \tag{96}$$

が満たされるならば, 次式が成立する.

$$\breve{L} := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t L(u)\mathrm{d}u = \lambda\breve{U}. \tag{97}$$

定理 5.7 の証明　式 (95) より, 次式が成り立つ.

$$\int_0^t L(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \sum_{n=1}^{A(s)} \mathbb{1}(a_n \le s < d_n)\mathrm{d}s. \tag{98}$$

ここで, $A(\cdot)$ と a_n の定義より, $a_{A(s)} \le s < a_{A(s)+1}$ となるので,

$$\begin{aligned} n > A(s) &\Longrightarrow a_n > s \Longrightarrow \mathbb{1}(a_n \le s < d_n) = 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{n>A(s)} \mathbb{1}(a_n \le s < d_n) = 0 \end{aligned}$$

したがって, 式 (98) は以下のように書き換えられる.

$$\int_0^t L(s)\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{A(t)} \int_0^t \mathbb{1}(a_n \leq s < d_n)\mathrm{d}s. \tag{99}$$

次に式(99)の左辺を下から評価する. $A(t) \geq D(t)$ $(\forall t \in \mathbb{R}_+)$から,

$$\int_0^t L(s)\mathrm{d}s \geq \sum_{n=1}^{D(t)} \int_0^t \mathbb{1}(a_n \leq s < d_n)\mathrm{d}s, \tag{100}$$

を得る. また, $D(\cdot)$とd_nの定義から, $d_{D(t)} \leq t < d_{D(t)+1}$が成り立つ. これより, $s > t$に対して,

$$\begin{aligned} n \leq D(t) &\Longrightarrow d_n \leq t \\ &\Longrightarrow 0 = \mathbb{1}(t < d_n) \geq \mathbb{1}(s < d_n) \geq \mathbb{1}(a_n \leq s < d_n) \geq 0. \end{aligned}$$

つまり, $n \leq D(t)$のとき, $\mathbb{1}(a_n \leq s < d_n) = 0$ $(\forall s > t)$となるので, 式(100)の右辺の積分範囲を$[0, t]$から$[0, \infty)$に拡張しても値は変化しない.

$$\int_0^t L(s)\mathrm{d}s \geq \sum_{n=1}^{D(t)} \int_0^\infty \mathbb{1}(a_n \leq s < d_n)\mathrm{d}s. \tag{101}$$

一方, 式(99)の積分範囲を$[0,t]$から$[0,\infty)$に拡張すると, 上からの評価になる. この事実と(101)を合わせると, 次式を得る.

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{D(t)}\int_0^\infty \mathbb{1}(a_n \le s < d_n)\mathrm{d}s\\&\le \int_0^t L(s)\mathrm{d}s \le \sum_{n=1}^{A(t)}\int_0^\infty \mathbb{1}(a_n \le s < d_n)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

上の不等式に, $\int_0^\infty \mathbb{1}(a_n \le s < d_n)\mathrm{d}s = d_n - a_n = U_n$を代入すると,

$$\sum_{n=1}^{D(t)} U_n \le \int_0^t L(s)\mathrm{d}s \le \sum_{n=1}^{A(t)} U_n, \tag{102}$$

と書き換えられる. ここで,

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i - \sum_{i=1}^{n-1} U_i,$$

と式(96)から,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}U_i - \sum_{i=1}^{n-1}U_i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}U_i - \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}U_i\\ &= \breve{U} - \breve{U} = 0,\end{aligned}$$

となり, 定理 5.2の条件が満たされる. そこで, 定理 5.2と式(96)を用いて,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{A(t)}U_n = \lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{t}\frac{1}{A(t)}\sum_{n=1}^{A(t)}U_n = \lambda\breve{U},$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{D(t)}U_n = \lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{t}\frac{1}{D(t)}\sum_{n=1}^{D(t)}U_n = \lambda\breve{U},$$

を得る. これらの極限を式(102)に適用すると, 次式が導かれる.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t L(s)\mathrm{d}s = \lambda\breve{U}.$$

□

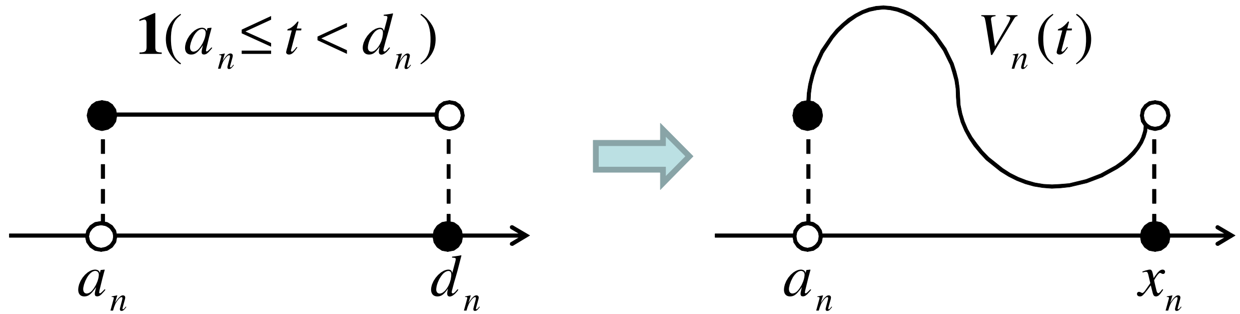
5.4 リトルの公式の拡張

- x_n: 次式を満たす時刻(客nの退去時刻d_nに一般化)

$$x_n > a_n, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - a_n}{n} = 0.$$

- V_n: 客nのコスト関数であり, 次式を満たす.

$$V_n(t) = 0, \quad t < a_n,\ t \ge x_n.$$



- $V(t)$ ($t \in \mathbb{R}_+$): 時刻tにおける総コスト

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

- G_n ($n \in \mathbb{N}$): 客nがもたらすコスト

$$G_n = \int_0^{\infty} V_n(t)\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{x_n} V_n(t)\mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{N}$$

定理 5.8 $V(0) < \infty$ および,

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} \in (0, \infty), \quad \breve{G} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} G_i < \infty,$$

を仮定すると, 次式が成り立つ.

$$\breve{V} := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^\infty V(t)\mathrm{d}t = \lambda\breve{G}.$$

証明　定理 5.7 と同様に証明できる (省略). □

5.5　リトルの公式の応用

5.5.1　サーバ数cの非割込み待ち行列 (待合室に着目)

- a_n: 客nの到着時刻
- b_n: 客nのサービス開始時刻

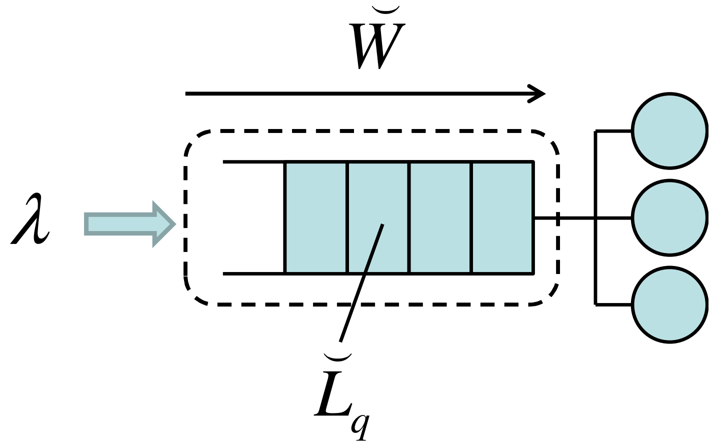
  $\Longrightarrow W_n = b_n - a_n$: 客$n$の(サービスを受けるまでの)待ち時間
- $L_q(t)$: 時刻tでの待ち人数(待合室にいる客数)
- 待ち人数の時間平均と, 待ち時間の客平均を次のように定義する.

$$\breve{L}_q = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^\infty L_q(t)\mathrm{d}t, \qquad \breve{W} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i$$

待合室をシステムとみて, リトルの公式を適用すれば, λと$\breve{W}$が存在し有限であるとき,

$$\breve{L}_q = \lambda \breve{W},$$

が成り立つ.



5.5.2　サーバ数cの非割込み待ち行列 (サーバに着目)

- b_n: 客nのサービス開始時刻

  $\Longrightarrow S_n = d_n - b_n$: 客$n$のサービス時間
- $L_s(t)$: 時刻tでの稼働サーバ数
- 稼働サーバ数の時間平均と, サービス時間の客平均を次のように定義

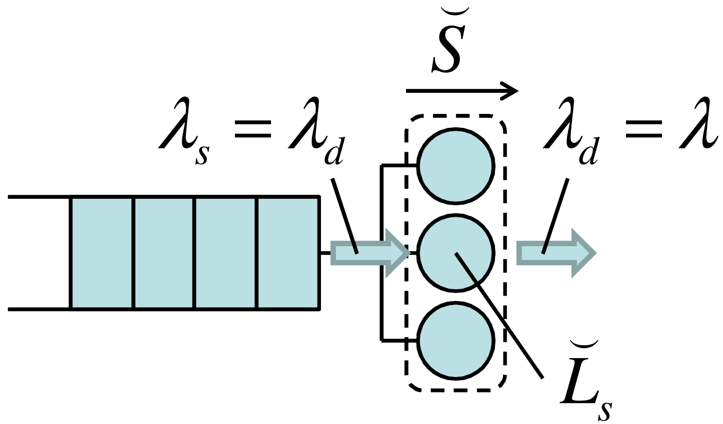
$$\breve{L}_s = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^\infty L_s(t)\mathrm{d}t, \qquad \breve{S} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$$

サーバ群をシステムとみると, サービス開始時刻b_nが到着時刻とみなせる. また, 定理 5.7の条件を仮定し, λ_sをサーバ群への到着率とすると, $\lambda_s = \lambda$が成り立つ.

そこで, サーバ群にリトルの公式を適用すると, 極限値$\breve{S}$が存在し, かつ, 有限であるとき, 次式が成り立つ.

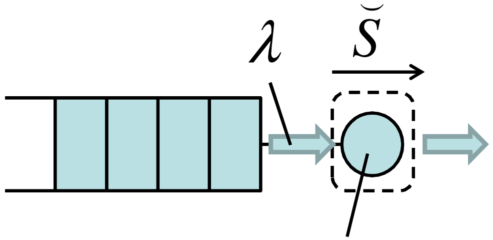
$$\breve{L}_s = \lambda\breve{S} = \rho.$$

なお, ρはトラヒック強度である.



5.5.3　非割込み単一サーバ待ち行列 (サーバに着目)

サーバ群をシステムとみると, サービス開始時刻 b_n が到着時刻とみなせる. また, また, 定理 5.7 の条件を仮定すると, サーバ群への到着率 λ_s は, システムの外部からの到着率 λ に等しい.



$$\breve{L}_s = \mathrm{P}(\text{サーバが稼働中}) \times 1$$
$$= \mathrm{P}(\text{系内客数が}\,1\,\text{以上}) = 1 - \mathrm{P}(\text{系内が空})$$

サーバ群をシステムとみなして, リトルの公式を適用すると, $\breve{L}_s = \lambda \breve{S} = \rho$ が成り立つので,

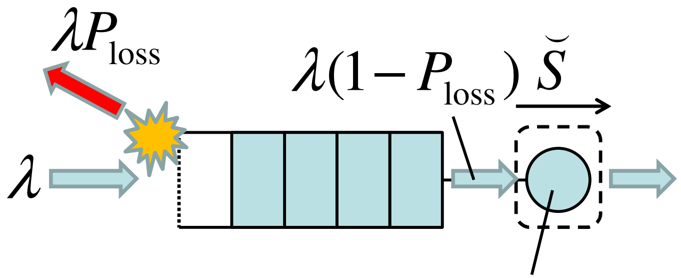
$$1 - \mathsf{P}(\text{系内が空}) = \rho,$$

となり, 次式が得られる.

$$\mathsf{P}(\text{系内が空}) = 1 - \rho.$$

5.5.4　有限待合室をもつ非割込み単一サーバ待ち行列 (サーバに着目)

- 待合室の容量が有限であるので, 待合室に空きがないときに到着した客はシステムに入れない. これを呼損あるいは棄却という.
- P_{loss}: 呼損率 (到着した客のうち, システムに入れない客の割合)
  - システムに入れる客の到着率は $\lambda(1-P_{\mathrm{loss}})$ に等しい.



$$\breve{L}_s = \mathrm{P}(\text{サーバが稼働中}) \times 1$$
$$= \mathrm{P}(\text{系内客数が}1\text{以上}) = 1 - \mathrm{P}(\text{系内が空})$$

リトルの公式より, $\breve{L}_s = \lambda(1-P_{\mathrm{loss}})\breve{S} = \rho(1-P_{\mathrm{loss}})$ が成り立つので,

$$1 - \mathrm{P}(\text{系内が空}) = \rho(1-P_{\mathrm{loss}}),$$

となり, 次式が導かれる.

$$P_{\mathrm{loss}} = 1 - \frac{1-\mathrm{P}(\text{系内が空})}{\rho}.$$

5.6 率保存則

5.6.1 結果と証明

リトルの公式に深く関わる率保存則について説明する†.

まず, $\{X(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ を, 次の条件を満たす確率過程とする.

条件 5.1 任意の $t \in \mathbb{R}_+$ に対して, 以下の (i)–(iii) が成り立つ.

(i) $X(t)$ は右連続かつ左極限をもつ.

(ii) (右微分可能性) $X'(t) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \dfrac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$.

(iii) $\{X(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ は不連続点を有し, その列を $\{t_n; n \in \mathbb{N}\}$ とする. さらに, 点列 $\{t_n\}$ の計数過程を $\{N(t); t \in \mathbb{R}_+\}$ とする. このとき, 次の極限が存在し, 正の実数となる.

$$\lambda := \lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t} \in (0, \infty). \tag{103}$$

† ここでの説明は, 木村俊一著, “待ち行列の数理モデル” [1] を参考にした.

定理 **5.9 (**率保存則**)** 条件 5.1 の下で, 以下の極限が存在すると仮定する.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\{X(t_k)-X(t_k-)\}\in(0,\infty). \tag{104}$$

さらに,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{t}=0, \tag{105}$$

を仮定する. このとき,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t X'(u)du=-\lambda\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\{X(t_k)-X(t_k-)\}, \tag{106}$$

が成り立つ.

注意 **5.2** 率保存則にはいくつかの変種があり, 定理 5.9 は, 微分形率保存則とよばれることもある.

証明　任意の$t \in \mathbb{R}_+$に対して,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t X'(u)du + \sum_{k=0}^{N(t)} \{X(t_k) - X(t_k-)\},$$

となる. 上式の両辺をtで割り, 式(103)と(105)を用いて, $t \to \infty$とすると,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t X'(u)du + \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \frac{1}{N(t)} \sum_{k=0}^{N(t)} \{X(t_k) - X(t_k-)\} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t X'(u)du + \lambda \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \{X(t_k) - X(t_k-)\}, \end{aligned}$$

を得る. よって, 式(106)が成り立つ. □

5.6.2　応用

率保存則を用いて, リトルの公式(定理5.7参照)を導く. n番目 ($n \in \mathbb{N}$) の客の到着時刻をa_nとし, その客の系内滞在時間をU_nとする. ただし, $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ とする. また, n番目 ($n \in \mathbb{N}$) 任意の$t \in \mathbb{R}_+$に対して,

$$A(t) = \sup\{n \in \mathbb{Z}_+ : a_n \le t\},$$

$$L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(a_n \le t < a_n + U_n),$$

と定義する. なお, リトルの公式の成立条件を仮定する.

$$\lambda := \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} \in (0,\infty), \tag{107}$$

$$\breve{U} := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i < \infty. \tag{108}$$

ここで, 確率過程$\{X(t); t \in \mathbb{R}_+\}$を次のように定義する.

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + U_k - t)\mathbb{1}(a_k \le t < a_k + U_k). \tag{109}$$

定義より, 確率過程$\{X(t)\}$は右連続かつ左極限をもつ. さらに, 式(109)の両辺を右微分して,

$$X(t') = -\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}(a_k \le t < a_k + U_k) = -L(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \tag{110}$$

を得る. よって, 条件 5.1 が満たされることが確認できた.

つづいて, 式(104)が成り立つことを確認する. 確率過程$\{X(t)\}$の不連続点は, $t = a_1, a_2, \ldots$ であり, 列$\{a_n\}$は狭義単調増加列であることから,

$$\lim_{t \uparrow a_n} \mathbb{1}(a_k \le t < a_k + U_k) = 0, \qquad k = n, n+1, \ldots,$$
$$\mathbb{1}(a_k \le a_n < a_k + U_k) = 0, \qquad k = n+1, n+2, \ldots,$$

および,

$$\lim_{t \uparrow a_n} \mathbb{1}(a_k \le t < a_k + U_k) = \mathbb{1}(a_k \le a_n < a_k + U_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

が成り立つ. これらの等式と式(110)を用いて,

$$X(a_n-) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k + U_k - a_n) \mathbb{1}(a_k \le a_n < a_k + U_k),$$

$$X(a_n) = \sum_{k=1}^{n} (a_k + U_k - a_n) 1\!\!1(a_k \le a_n < a_k + U_k),$$

が得られ, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} X(a_n) - X(a_n -) &= (a_n + U_n - a_n) 1\!\!1(a_n \le a_n < a_n + U_k) \\ &= U_n, \end{aligned}$$

となる. さらに, これと式(108)より,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \{X(a_k) - X(a_k -)\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} U_k = \breve{U} \in (0, \infty),$$

であるから, 式(104)が成り立つ.

最後に, (105)が成り立つことを確認する.

$$D(t) = \sup\{n \in \mathbb{N} : a_n + U_n \le t\}, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

とおくと, 式(109)から,

$$0 \le \frac{X(t)}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=D(t)}^{A(t)} (a_n + U_n - t) 1\!\!1(a_n \le t < a_n + U_n)$$

$$\leq \frac{1}{t}\sum_{n=D(t)}^{A(t)} U_n = \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{A(t)} U_n - \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{D(t)} U_n, \tag{111}$$

を得る. さらに, (107), (108), および定理 5.2 から,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{A(t)} U_n = \lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{t}\frac{1}{A(t)}\sum_{n=1}^{A(t)} U_n = \lambda\breve{U},$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{D(t)} U_n = \lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{t}\frac{1}{D(t)}\sum_{n=1}^{D(t)} U_n = \lambda\breve{U},$$

となるので, これらと式(111)を合わせると,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X(t)}{t} = 0,$$

が得られ, 式(105)が成り立つことが確認できる.

以上の議論により, 式(109)で定義された確率過程 $\{X(t)\}$ は, 率保存則の条件をすべて満たすことが確認できた. したがって, 式(106), (108), および(110)から, 次式を得る.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t L(u)du = \lambda \breve{U}.$$

これは定理5.7の式(97)と等価である.

6　離散時間マルコフ連鎖

6.1　基本的な表記

- $\boldsymbol{e}$: すべての成分が1であるような列ベクトル(次数は文脈依存)
- $\mathbf{0}$: すべての成分が0であるような行または列ベクトル(同上)
- $\boldsymbol{I}$: 単位行列(同上)
- $\boldsymbol{O}$: ゼロ行列(同上)
- $\mathbb{S}$: 可算集合 (本節では, マルコフ連鎖の状態空間とする)
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots,\}$
- $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots,\}$
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

6.2 斉時なマルコフ連鎖

定義 6.1 状態空間$\mathbb{S}$上の確率過程$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$が, 任意の$n \in \mathbb{N}$と状態列$j_0, j_1, \ldots, j_{n-1}, i, j \in \mathbb{S}$に対して,

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = j_{n-1}, \ldots, X_0 = j_0) \\ &\quad = \mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \end{aligned} \tag{112}$$

をみたすとき, $\{X_n\}$を状態空間$\mathbb{S}$上の離散時間マルコフ連鎖とよぶ.

- 式(112) $\Longrightarrow$ マルコフ性: 将来の状態が,現在の状態にのみ依存
- 式(112)の右辺が時刻nとは独立 $\Longrightarrow$ 斉時的

以下では, 斉時なマルコフ連鎖のみ考え, 以下の様に表記する.

$$P_{i,j} = \mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

6.3 推移確率行列

定義 6.2 推移確率 $P_{i,j} = \mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ を成分にもつ行列 $\boldsymbol{P} = (P_{i,j})_{i,j\in\mathbb{S}}$ をマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ の推移確率行列 (遷移確率行列) とよぶ.

(i) 行列 $\boldsymbol{P}$ は非負 (定義から明らか) $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{P} \ge \boldsymbol{O}$

(ii) 行列 $\boldsymbol{P}$ の行和はすべて 1 $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{Pe} = \boldsymbol{e}$

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{S}} P_{i,j} &= \sum_{j\in\mathbb{S}} \mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \\ &= \mathsf{P}(X_{n+1} \in \mathbb{S} \mid X_n = i) \\ &= \mathsf{P}(\Omega\ (\text{全事象}) \mid X_n = i) = 1.\end{aligned}$$

性質 (i), (ii) をみたす正方行列を一般に確率行列とよぶ.

6.4 状態分布

任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して, 行ベクトル $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = (\pi_i^{(n)})_{i \in \mathbb{S}}$ を

$$\pi_i^{(n)} = \mathsf{P}(X_n = i), \quad i \in \mathbb{S},$$

と定義する. $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ は初期分布とよばれる.

また, 定理 3.6, ならびに, マルコフ性と斉時性により, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\pi_j^{(n)} = \mathsf{P}(X_n = j) &= \sum_{i \in \mathbb{S}} \mathsf{P}(X_n = j, X_{n-1} = i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{S}} \mathsf{P}(X_{n-1} = i)\mathsf{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{S}} \pi_i^{(n-1)} P_{i,j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall (i_1, j_1) \in \mathbb{S}^2,
\end{aligned}$$

が成り立つ. これより, 次式を得る.

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}^{(n-2)} \boldsymbol{P}^2 = \cdots = \boldsymbol{\pi}^{(0)} \boldsymbol{P}^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

マルコフ連鎖は初期分布 $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ と推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ で, 特徴付けられる.

6.5 連結クラスと既約性

- $P_{i,j}^{(n)}$: $\boldsymbol{P}^n$ の (i,j) 成分

$$P_{i,j}^{(n)} = \sum_{\nu\in\mathbb{S}} P_{i,\nu}^{(n-1)} P_{\nu,j} = \sum_{\nu\in\mathbb{S}} P_{i,\nu} P_{\nu,j}^{(n-1)}$$

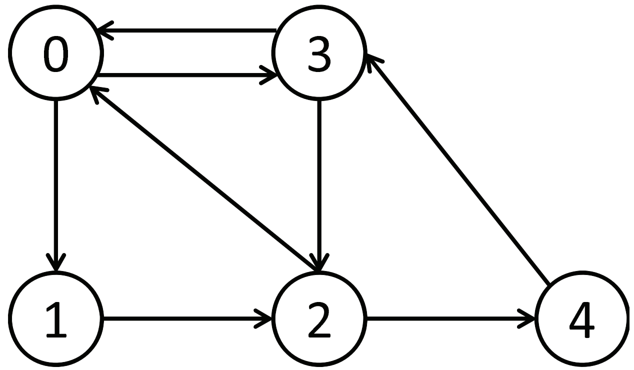
定義 6.3 状態部分集合 $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{S}$ が閉じているとは, 任意の $i \in \mathbb{C}$ および $j \in \mathbb{S}\setminus\mathbb{C}$ に対して, $P_{i,j}^{(m)} > 0$ なる自然数 m が存在しないときにいう.

定義 6.4 状態部分集合 $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{S}$ が連結クラスであるとは, 各 $(i,j) \in \mathbb{C}^2$ に対して, $P_{i,j}^{(m)} > 0$ なる自然数 $m := m(i,j)$ が存在するときにいう.
さらに, 状態空間 $\mathbb{S}$ が連結クラスであるとき, マルコフ連鎖 $\{X_n\}$ とその推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ は既約であるという.

既約性は, 状態空間から任意に選ばれた2つの状態 (重複を許す) が互いに有限回の推移で到達可能であることを保証する.

例 **6.1 (既約な場合)**

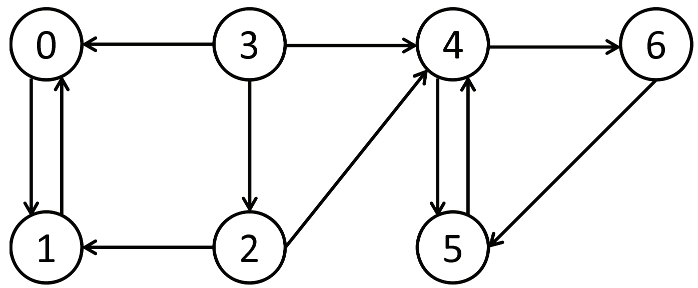
$$
\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$



状態連結グラフ

例 **6.2 (可約な場合)**

$$
\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.2 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$



状態連結グラフ

6.6 周期性

定義 6.5 状態$i \in \mathbb{S}$に対し, $P_{i,i}^{(n)} = \mathrm{P}(X_n = i \mid X_0 = i) > 0$をみたす自然数$n$の集合$\mathbb{D}_i := \{n \in \mathbb{N}; P_{i,i}^{(n)} > 0\}$の最大公約数$d_i$を, 状態$i$の周期とよぶ. すなわち,

$$d_i = \gcd \mathbb{D}_i = \gcd\{n \in \mathbb{N}; P_{i,i}^{(n)} > 0\},$$

が状態iの周期である.

例 6.3 (周期的な例) $\mathbb{S} = \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$とし, 推移確率行列$\boldsymbol{P} = (P_{i,j})$が

$$P_{i,j} = \begin{cases} p \in (0,1) & j = i+1, \\ 1-p & j = i-1, \end{cases} \tag{113}$$

で与えられるとき, 任意の$n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$P_{i,i}^{(2n)} \geq p^n (1-p)^n > 0, \qquad P_{i,i}^{(2n+1)} = 0,$$

であるから, 状態iの周期は$d_i = \gcd\{2, 4, 6, \dots\} = 2$となる.

定理 6.1 2つの状態$i, j \in \mathbb{S}$が互いに到達可能, すなわち, $P_{i,j}^{(M)} > 0$, $P_{j,i}^{(N)} > 0$を満たす自然数M, Nが存在するとき, $d_i = d_j$が成り立つ.

定理 6.1の証明　自然数dの正の倍数からなる集合を$d\mathbb{N}$と表記する. すなわち,

$$d\mathbb{N} = \{d, 2d, 3d, \dots\}$$

とすると, 定義 6.5から, $d_i = \gcd \mathbb{D}_i$であるので,

$$\mathbb{D}_i \subseteq d_i\mathbb{N} = \{d_i, 2d_i, 3d_i, \dots\},$$

が成り立つ. さらに, 定理の仮定$P_{i,j}^{(M)} > 0$, $P_{j,i}^{(N)} > 0$より, 任意の$K \in \mathbb{D}_j$と$n \in \mathbb{Z}_+$に対して,

$$P_{i,i}^{(M+nK+N)} \ge P_{i,j}^{(M)} P_{j,j}^{(nK)} P_{j,i}^{(N)} > 0,$$

を得る. これは, $M + nK + N$が状態iから始めたときの状態iへの訪問可能時刻であることを意味している. よって, 任意の$n \in \mathbb{Z}_+$に対して,

$$M + nK + N \in \mathbb{D}_i \subseteq d_i\mathbb{N}, \tag{114}$$

となる.

式(114)は, $n = 0$に対しても成り立つので, $M + N \in d_i\mathbb{N}$である. したがって,

$$nK \in d_i\mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \forall K \in \mathbb{D}_j \tag{115}$$

式(115)は, nがd_iとは互いに素である場合にも成立するので, $K \in d_i\mathbb{N}$でなければならない. 結局,

$$K \in \mathbb{D}_j \Longrightarrow K \in d_i\mathbb{N},$$

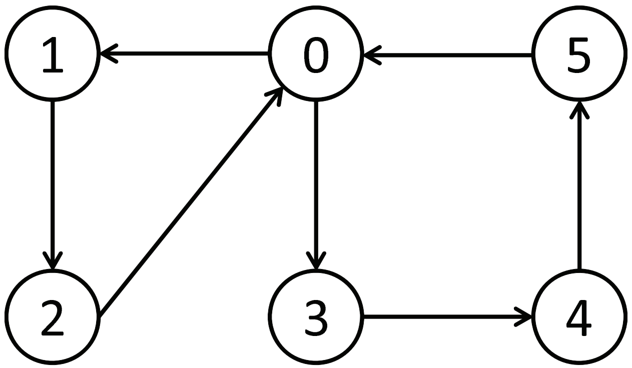
を示したことになり, $\mathbb{D}_j \subseteq d_i\mathbb{N}$を得る. よって,

$$d_j = \gcd \mathbb{D}_j \geq \gcd d_i\mathbb{N} = d_i,$$

が示せた. また, 状態iとjの役割を逆にすれば, 同様の議論により, $d_j \leq d_i$が示せるので, $d_i = d_j$が成り立つ. □

定理6.1より, 連結クラス内のすべての状態は同じ周期をもつ. したがって, 既約なマルコフ連鎖では, 状態空間に含まれるすべての状態は同じ周期をもち, その共通する周期をマルコフ連鎖および, その推移確率行列の周期とよぶ. また, 周期が1に等しいとき, 非周期的であるという.

例 **6.4 (**非周期的な例**)** 下図で示されるような連結構造をもつマルコフ連鎖を考える. 明らかに, このマルコフ連鎖は既約である.



状態0に関する再帰的なパスは, $0 \to 1 \to 2 \to 0$と $0 \to 3 \to 4 \to 5 \to 0$の2通りがある. 両者のパス長はそれぞれ3と4であるので, $d_0 = \gcd\{3, 4\} = 1$となる. よって, このマルコフ連鎖は非周期的である.

補題 6.2 既約な推移確率行列 $\boldsymbol{P} := (P_{i,j})_{i,j\in\mathbb{S}}$ の周期を d とする．任意の $i,j\in\mathbb{S}$ に対して, ある $\nu\in\{0,1,\dots,d-1\}$ に対して,

$$P_{i,j}^{(\ell)} > 0, \quad \ell \equiv \nu \pmod{d}, \tag{116}$$

であるならば, 次が成り立つ.

$$P_{j,i}^{(m)} > 0 \Longrightarrow m \equiv d-\nu \pmod{d}, \tag{117}$$

$$\ell \not\equiv \nu \pmod{d} \Longrightarrow P_{i,j}^{(\ell)} = 0. \tag{118}$$

証明　まず, 式(117)を背理法で示す. 式(117)が成り立たないとする. つまり,

$$P_{j,i}^{(m)} > 0, \quad m \not\equiv d-\nu \pmod{d},$$

とする. これと式(116)から,

$$P_{i,i}^{(\ell+m)} \ge P_{i,j}^{(\ell)} P_{j,i}^{(m)} > 0, \quad \ell+m \not\equiv 0 \pmod{d},$$

となるが, これは状態 i の周期が d であることに矛盾する.

つづいて, 式(118)を示す. 行列$\boldsymbol{P}$の既約性より, $P_{j,i}^{(m)} > 0$となる自然数mが存在し, そのような自然数mは, 式(117)より, $m \equiv d - k \pmod d$でなければならない. つまり,

$$P_{i,j}^{(m)} > 0, \quad m \ \equiv \nu \pmod d$$

ここで, 式(118)が成り立たないとすると, $P_{i,j}^{(n)} > 0$となるような$n \not\equiv k \pmod d$が存在することになる. したがって,

$$P_{i,i}^{(n+m)} \geq P_{i,j}^{(n)} P_{j,i}^{(m)} > 0, \quad \ell + m \not\equiv 0 \pmod d$$

となり, 状態iの周期がdであることに矛盾するので, 式(118)が成立する. $\square$

定理 6.3 既約な推移確率行列$\boldsymbol{P} := (P_{i,j})_{i,j\in\mathbb{S}}$の周期を$d$とする．このとき，空ではない背反な$d$個の部分集合$\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \ldots, \mathbb{S}_{d-1}$が存在し，次を満たす．

$$\bigsqcup_{k=0}^{d-1} \mathbb{S}_k = \mathbb{S}, \tag{119}$$

$$i \in \mathbb{S}_k, j \in \mathbb{S}_\ell \implies P_{i,j}^{(n)} = 0, n \not\equiv \ell - k \ (\mathrm{mod}\ d). \tag{120}$$

証明　$i_* \in \mathbb{S}$を任意に選び，集合$\mathbb{S}_k$ ($k = 0, 1, \ldots, d-1$) を次のように定める．

$$\mathbb{S}_k = \left\{ i \in \mathbb{S}; P_{i_*,i}^{(n)} > 0, n \equiv k \ (\mathrm{mod}\ d) \right\}. \tag{121}$$

$\boldsymbol{P}$が既約であることから，任意の$i \in \mathbb{S}$に対して，$P_{i_*,i}^{(n)} > 0$となる$n \in \mathbb{N}$が存在するので，状態iは必ずいずれかの部分集合に属する．つまり，次が成り立つ．

$$\bigcup_{k=0}^{d-1} \mathbb{S}_k = \mathbb{S}. \tag{122}$$

ここで，異なる$k, \ell \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ に対して，$i \in \mathbb{S}_k \cap \mathbb{S}_\ell \neq \varnothing$とすると，

$$P_{i_*,i}^{(n)} > 0, \quad n \equiv k, \ell \ (\mathrm{mod}\ d),$$

となり，補題6.2の主張と矛盾する．よって，式(122)は直和である．

次に, $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \dots, \mathbb{S}_{d-1}$ はすべて空ではないことを示す. 仮に $\mathbb{S}_k = \varnothing$ とすると, すべての $i \in \mathbb{S}$ に対して,

$$P_{i_*,i}^{(n)} = 0, \quad n \equiv k \pmod d,$$

となる. したがって, 次式が成り立つ.

$$\sum_{i \in \mathbb{S}} P_{i_*,i}^{(n)} = 0, \quad n \equiv k \pmod d,$$

これは $\boldsymbol{P}^n$ が確率行列であることに反する.

最後に式(120) を示す. 背理法を用いるために, 以下では, $i \in \mathbb{S}_k$, $j \in \mathbb{S}_\ell$ とし, 式(120) を否定する. すなわち,

$$\exists m \not\equiv \ell - k \pmod d \ \text{ s.t. } P_{i,j}^{(m)} > 0,$$

を仮定する. ところで, 式(121) より,

$$\exists n \equiv k \pmod d \ \text{ s.t. } P_{i_*,i}^{(n)} > 0,$$

であるので,

$$P_{i_*,j}^{(n+m)} \ge P_{i_*,i}^{(n)} P_{i,j}^{(m)} > 0, \quad n + m \not\equiv \ell \pmod d,$$

となるが, これは $j \in \mathbb{S}_\ell$ に反する. 以上の議論から, 式(120) が示された. $\square$

定理 6.3から, 次の結果を得る.

系 6.4 周期dをもつ既約な推移確率行列$\boldsymbol{P} := (P_{i,j})_{i,j\in\mathbb{S}}$に対しては, 以下を満たす全射関数$f : \mathbb{S} \to \{0, 1, \ldots, d-1\}$が存在する.

$$P_{i,j}^{(n)} > 0,\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow n \equiv f(j) - f(i) \pmod d. \tag{123}$$

証明　集合$\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \ldots, \mathbb{S}_{d-1}$を, 定理 6.3の主張に現れる$\mathbb{S}$の背反な部分集合とする. このとき, 式(119)より, 次を満たす関数$f : \mathbb{S} \to \{0, 1, \ldots, d-1\}$が存在する.

$$i \in \mathbb{S}_{f(i)}, \qquad \forall i \in \mathbb{S}, \tag{124}$$

$$\bigcup_{i\in\mathbb{S}} \mathbb{S}_{f(i)} = \bigsqcup_{k=0}^{d-1} \mathbb{S}_k = \mathbb{S}. \tag{125}$$

式(125)は, 関数fが$\mathbb{S}$から$\{0, 1, \ldots, d-1\}$への全射であることを示している. さらに, 式(124)を用いて, 式(120)を書き換えると,

$$P_{i,j}^{(n)} = 0, \qquad n \not\equiv f(j) - f(i) \pmod d,$$

となり, これは式(123)と等価である. □

系 6.4 から次の結果を得る.

系 **6.5** 既約な推移確率行列 $\boldsymbol{P} := (P_{i,j})_{i,j\in\mathbb{S}}$ の周期を d とするとき, 状態を適当に並び替えることで, $\boldsymbol{P}$ は次のような構造になる.

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} \mathbb{S}_0 & \mathbb{S}_1 & \mathbb{S}_2 & \mathbb{S}_3 & \cdots & \mathbb{S}_{d-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbb{S}_0 \\ \mathbb{S}_1 \\ \mathbb{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{S}_{d-2} \\ \mathbb{S}_{d-1} \end{array} & \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_{0,1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_{1,2} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_{d-2,d-1} \\ \boldsymbol{P}_{d-1,0} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \end{array}. \tag{126}$$

ただし, $\boldsymbol{P}_{0,1}, \boldsymbol{P}_{1,2}, \dots, \boldsymbol{P}_{d-1,0}$ はすべての行和が 1 となる非負行列である.

証明　本系の主張は, 式 (123) において, $n = 1$ とすれば明らか. □

注意 **6.1** 式 (126) より, $\boldsymbol{P}^d$ は次のようになる.

$$
\boldsymbol{P}^d = \begin{array}{c} \\ \mathbb{S}_0 \\ \mathbb{S}_1 \\ \mathbb{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{S}_{d-2} \\ \mathbb{S}_{d-1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \mathbb{S}_0 & \mathbb{S}_1 & \mathbb{S}_2 & \mathbb{S}_3 & \cdots & \mathbb{S}_{d-1} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{P}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{O} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{P}_{d-2} & \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_{d-1}
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{127}
$$

ただし, $\boldsymbol{P}_k$ $(k = 0, 1, \dots, d-1)$ は次式で定められる確率行列である.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_k &= \boldsymbol{P}_{k,k+1}\boldsymbol{P}_{k+1,k+2} \cdots \boldsymbol{P}_{k+d-1,k+d}, \quad k = 0, 1, \dots, d-1, \\
\boldsymbol{P}_{d-1,d} &= \boldsymbol{P}_{d-1,0}, \quad \boldsymbol{P}_{\ell,\ell+1} = \boldsymbol{P}_{\ell+d,\ell+d+1}, \quad \ell \in \mathbb{Z}_+,
\end{aligned}
$$

ところで, $\{Y_m := X_{md}; m \in \mathbb{Z}_+\}$ は, $\boldsymbol{P}^d$ を推移率行列とするマルコフ連鎖である. 式(127) より, マルコフ連鎖 $\{Y_m\}$ は, 部分集合 $\mathbb{S}_k$ から推移を始めると, $\mathbb{S}_k$ の中で推移し続け, その推移は確率行列 $\boldsymbol{P}_k$ に支配される.

さて, 元のマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$に戻る. $\boldsymbol{P}$は既約であるので, 部分集合$\mathbb{S}_k$に含まれる状態は互いに到達可能である. したがって, $\boldsymbol{P}_k$は既約ま確率行列でなければならない. 一方で, $\boldsymbol{P}$の周期はdであるが, $\boldsymbol{P}_k$は非周期的となる. 実際, $\boldsymbol{P}_k$ が周期$d' \ge 2$をもつとすると, 部分集合$\mathbb{S}_k$に含まれる状態の周期は$dd' > d$となり, $\boldsymbol{P}$の周期がdであることに矛盾する.

定理 6.6 既約な推移確率行列$\boldsymbol{P} := (P_{i,j})_{i,j\in\mathbb{S}}$の周期を$d$とすると, 任意の$i,j \in \mathbb{S}$に対して, ある$m, n_0 \in \mathbb{N}$が存在し, 次式が成り立つ.

$$P_{i,j}^{(m+nd)} > 0, \qquad \forall n \ge n_0. \tag{128}$$

注意 6.2 $\boldsymbol{P}$が既約かつ非周期的($d = 1$)な場合には, 任意の$i,j \in \mathbb{S}$に対して, ある$n_{i,j}^* \in \mathbb{N}$が存在し,

$$P_{i,j}^{(n)} > 0, \qquad \forall n \ge n_{i,j}^*,$$

となる. したがって, 状態空間$\mathbb{S}$が有限の場合には, 次式が成り立つ.

$$\boldsymbol{P}^n > \boldsymbol{O}, \qquad \forall n \ge N := \sup_{i,j\in\mathbb{S}} n_{i,j}^*.$$

定理 6.6の証明には次の補題を用いる.

補題 6.7 自然数の集合 $\mathbb{A} = \{a_i; i \in \mathbb{N}\}$ が加法について閉じているとき, 集合 $\mathbb{A}$ は有限個の例外を除き, $d := \gcd \mathbb{A}$ の倍数をすべて含む.

定理 6.6の証明 $\mathbb{D}_j = \{n \in \mathbb{N}; P_{j,j}^{(n)} > 0\}$ とおく. $\boldsymbol{P}$ の周期が d であることから, $d = \gcd \mathbb{D}_j$ となる. また, $k, \ell \in \mathbb{D}_j$ とすると, $P_{j,j}^{(k)} > 0$, $P_{j,j}^{(\ell)} > 0$ であるので,

$$P_{j,j}^{(k+\ell)} \geq P_{j,j}^{(k)} P_{j,j}^{(\ell)} > 0,$$

が成り立ち, $k + \ell \in \mathbb{D}_j$ となる. つまり, $\mathbb{D}_j$ は加法について閉じている. よって, $d = \gcd \mathbb{D}_j$ と補題 6.7から, $\mathbb{D}_j$ は有限個の例外を除き, 周期 d の倍数をすべて含む. これは, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 次式が成り立つことを意味している.

$$\{nd; n \geq n_0\} \subset \mathbb{D}_j.$$

さらに, 既約性から, ある $m \in \mathbb{N}$ が存在し, $P_{i,j}^{(m)} > 0$ となって, 次式が成り立つ.

$$P_{i,j}^{(m+nd)} \geq P_{i,j}^{(m)} P_{j,j}^{(nd)} > 0, \quad \forall n \geq n_0,$$

□

以下では, 補題 6.7の証明する. まず, 証明に必要な2つの補題を与える.

補題 6.8 整数全体からなる集合$\mathbb{Z}$の部分集合$\mathbb{A}$が, 少なくとも1つの非零元をもち, かつ, 加法と減法について閉じているとする. このとき, 最小の正要素$a \in \mathbb{A}$に対して, $\mathbb{A} = \{ka; k \in \mathbb{Z}\}$が成り立つ.

補題 6.8の証明　任意の非零要素$c \in \mathbb{A}$, $c \neq 0$を考える. 集合$\mathbb{A}$は加法と減法について閉じているので,

$$0 = c - c \in \mathbb{A}, \quad -c = 0 - c \in \mathbb{A},$$

となり, 集合$\mathbb{A}$は少なくとも1つの正の元をもつ. そこで, 最小の正の元を$a \in \mathbb{A}$とすると,

$$ka \in \mathbb{A} \Longrightarrow (k+1)a = ka + a \in \mathbb{A} \text{ かつ } (k-1)a = ka - a \in \mathbb{A}$$

となるので, 次式が成り立つ.

$$\{ka; k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{A}. \tag{129}$$

以下では, $\{ka; k \in \mathbb{Z}\} \supseteq \mathbb{A}$を示す. 任意の元$b \in \mathbb{A}$に対して, $b = k_0 a + r$を満たすような$k_0 \in \mathbb{Z}$と$r \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$が存在する. 式(129)より, $k_0 a \in \mathbb{A}$であ

る. したがって, r は $\mathbb{A}$ に属する2つの整数 b と $k_0 a$ の差で表され, 集合 $\mathbb{A}$ は加法と減法について閉じているので,

$$r = b - k_0 a \in \mathbb{A}.$$

すなわち, r は集合 $\mathbb{A}$ の元である.

ここで, 仮に $r > 0$ とすると, $r \leq a - 1$ より, a が $\mathbb{A}$ の最小の正の元であることに反する. よって, $r = 0$ でなければならず, $b = k_0 a$ となる. b は集合 $\mathbb{A}$ の任意の元であったので, $\mathbb{A} \subseteq \{ka; k \in \mathbb{Z}\}$ となる. □

補題 6.9 自然数 $a_1, a_2, \ldots, a_K$ の最大公約数を d とする. このとき,

$$\sum_{i=1}^{K} n_i a_i = d,$$

を満たす $n_1, n_2, \ldots, n_K \in \mathbb{Z}$ が存在する.

補題 6.9 の証明　次式で定義される集合 $\mathbb{A}$ を考える.

$$\mathbb{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{K} n_i a_i ; n_1, n_2, \ldots, n_K \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{130}$$

集合 $\mathbb{A}$ は加法と減法について閉じているので, 補題 6.8 より, 最小の正の元 $a \in \mathbb{A}$ が存在して, 次式が成り立つ.

$$\mathbb{A} = \{ka; k \in \mathbb{Z}\}. \tag{131}$$

さて, 集合 $\mathbb{A}$ の定義(130) から, $\mathbb{A} \ni a = \sum_{i=1}^{K} n_i a_i$ を満たす $n_1, n_2, \ldots, n_K \in \mathbb{Z}$ が存在する. また, 補題の仮定から, $\gcd\{a_1, a_2, \ldots, a_K\} = d$ であったので, a は d で割り切れる. よって, $d \leq a$ となる.

さらに, 式(130) と (131) より, $\{a_1, a_2, \ldots, a_K\} \subseteq \mathbb{A} \subseteq a\mathbb{N}$ となるが, 補題の仮定より, $\gcd\{a_1, a_2, \ldots, a_K\} = d$ であるので,

$$d = \gcd\{a_1, a_2, \ldots, a_K\} \leq \gcd\{ka; k \in \mathbb{Z}\} = a,$$

が成り立つ.

以上の議論により, $d = a = \sum_{i=1}^{K} n_i a_i$ となる. □

補題 6.8 および6.9 を用いて, 補題 6.7 を証明する.

補題 6.7(再掲)

集合 $\mathbb{A} = \{a_i; i \in \mathbb{N}\}$ を自然数の集合とし, 加法について閉じているとする. このとき, $d = \gcd \mathbb{A}$ とすると, 集合 $\mathbb{A}$ は有限個の例外を除き, d の倍数をすべて含む.

補題 6.7 の証明　一般性を失うことなく $d = 1$, すなわち,

$$\gcd\{a_i; i \in \mathbb{N}\} = 1,$$

と仮定できる($d \geq 2$ の場合には, $\mathbb{A}' = \{a_i/d; i \in \mathbb{N}\}$ を考える).
さて, $\gcd\{a_i; i \in \mathbb{N}\} = 1$ より, 次式を満たすような $K \in \mathbb{N}$ が存在する.

$$\gcd\{a_1, a_2, \ldots, a_K\} = 1.$$

したがって, 補題 6.9 において $d = 1$ とした結果から, 次式を満たす $n_1, n_2, \ldots, n_K \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ が存在することがわかる.

$$1 = \sum_{i=1}^{K} n_i a_i, \tag{132}$$

式(132)の左辺が1であり自然数であることから, $\{n_1, n_2, \ldots, n_K\}$の中には自然数が含まれる. それらを$\{n_{i_1}, n_{i_2}, \ldots, n_{i_M}\}$とし, 残りの負の整数を$\{n_{i_{M+1}}, n_{i_{M+2}}, \ldots, n_{i_K}\}$とする. そして, 次のようにおく.

$$P := \sum_{m=1}^{M} n_{i_m} a_{i_m} > 0, \qquad N := \sum_{m=M+1}^{K} (-n_{i_m}) a_{i_m} > 0.$$

集合$\mathbb{A} = \{a_i; i \in \mathbb{N}\}$は加法について閉じているので, $P, N \in \mathbb{A}$であり, また式(132)より, $1 = P - N$を満たす.

ここで, nを$n \geq N(N-1)$を満たす任意の自然数とすると,

$$n = sN + r, \tag{133}$$

を満たす$s \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$が存在する. ただし, $n \geq N(N-1)$より, $s \geq N-1$でなければならない. よって, $s \geq r$となる. さらに, $1 = P - N$と式(133)から,

$$n = sN + r(P - N) = (s - r)N + rP$$

を得る. また, $s - r \geq 0$, $r \geq 0$であるので, 自然数nは, 加法について閉じた集合Aの元P, Nの倍数の和として表現できる. よって, $n \in \mathbb{A}$である. □

6.8 停止時刻

定義 6.6 (停止時刻) 非負整数値(無限大を含む)を取る確率変数τが, 確率過程$\{Y_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$に対する停止時刻であるとは, 任意の$m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$に対して, 事象$\{\tau \le m\}$が$\{Y_0, Y_1, \dots, Y_m\}$のすべて, あるいはその一部だけで表現できるときに言う. つまり, 事象$\{\tau \le m\}$は$\{Y_n; n \ge m+1\}$とは独立である.

注意 6.3 上の定義において, 事象$\{\tau \le m\}$を事象$\{\tau = m\}$に置き換えても, 数学的には等価な定義となる. これを示すために, $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_m\}$のすべて, あるいはその一部だけで表現できる事象からなる集合を$\mathcal{F}_m$とおく. 明らかに,

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots$$

が成り立つ. ここで, $\{\tau \le m\} \in \mathcal{F}_m$と仮定すると, 次式を得る.

$$\{\tau = m\} = \{\tau \le m\} \setminus \{\tau \le m-1\} \in \mathcal{F}_m.$$

つまり,

$$\{\tau \le m\} \in \mathcal{F}_m \Longrightarrow \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m.$$

次に, 任意の $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ に対して, $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ が成り立つと仮定すると,

$$\{\tau \leq m\} = \bigcup_{k=1}^{m} \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_m,$$

となる.

以上の議論から,

$$\{\tau \leq m\} \in \mathcal{F}_m,\ \forall m \in \mathbb{Z}_+ \iff \{\tau = m\} \in \mathcal{F}_m,\ \forall m \in \mathbb{Z}_+,$$

が成り立つ. よって, 定義 6.6 において, 事象 $\{\tau \leq m\}$ を事象 $\{\tau = m\}$ に置き換えても, 数学的に等価な定義となる.

例 **6.5** サイコロを繰り返し振る状況を考える. n 回目に出たサイコロの目を X_n とし, 初めて 1 の目が出るまでにサイコロを振った回数を τ とすると,

$$\{\tau \leq m\} = \bigcup_{n=1}^{m} \{X_n = 1\},$$

が成り立つので, τ は $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ に対する停止時刻である.

例 6.6 状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$を考え, 確率変数$\tau$を状態部分集合$\mathbb{C} \subset \mathbb{S}$への初到達時刻, すなわち,

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{Z}_+ : X_n \in \mathbb{C}\},$$

と定義すると,

$$\{\tau \le m\} = \bigcup_{n=1}^{m} \{X_n \in \mathbb{C}\},$$

が成り立つので, τは$\{X_n\}$に対する停止時刻である.

補題 6.10 (Waldの補題) $\{Y_n; n \in \mathbb{N}\}$を独立同一に分布する確率変数列とし, かつ, $\mathsf{E}[|Y_1|] < \infty$を満たすものとする. さらに, τを確率変数列$\{Y_n\}$に対する停止時刻とする. このとき, 次式が成り立つ.

$$\mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\tau} Y_n\right] = \mathsf{E}[\tau]\mathsf{E}[Y_1]. \tag{134}$$

証明　まず, $Y_n \geq 0$ である場合を考える. このとき, 無限和と期待値の順番を入れ替えることができるので,

$$\mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\tau} Y_n\right] = \mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(\tau \geq n) Y_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\left[\mathbb{1}(\tau \geq n) Y_n\right], \tag{135}$$

となる. ここで, $\mathbb{1}(\tau \geq n) = 1 - \mathbb{1}(\tau \leq n-1)$ と停止時刻の定義より, $\mathbb{1}(\tau \geq n)$ と Y_n は独立である. したがって, 式(135)から次式を得る.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\tau} Y_n\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}[\mathbb{1}(\tau \geq n)]\mathsf{E}[Y_n] \\
&= \mathsf{E}[Y_1] \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}[\mathbb{1}(\tau \geq n)] \\
&= \mathsf{E}[Y_1] \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\tau \geq n) = \mathsf{E}[Y_1]\mathsf{E}[\tau].
\end{aligned}$$

したがって, 式(134)が成り立つ.

次に, 一般の場合を考える. Y_n^+ と Y_n^- を次のように定義する.

$$\begin{aligned} Y_n^+ &= \max(Y_n, 0) \geq 0, \\ Y_n^- &= -\min(Y_n, 0) = \max(-Y_n, 0) \geq 0. \end{aligned}$$

すると, $Y_n = Y_n^+ - Y_n^-$ となり, 期待値の線形性を用いると,

$$\mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\tau} Y_n\right] = \mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\tau} Y_n^+\right] - \mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\tau} Y_n^-\right], \tag{136}$$

を得る. 停止時刻の定義から, $\mathbb{1}(\tau \geq n) = 1 - \mathbb{1}(\tau \leq n-1)$ は, Y_n^+ と Y_n^- とは独立であるので, $Y_n \geq 0$ の場合の証明と同様にして,

$$\mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\tau} Y_n^+\right] = \mathsf{E}[\tau]\mathsf{E}[Y_1^+], \qquad \mathsf{E}\left[\sum_{n=1}^{\tau} Y_n^-\right] = \mathsf{E}[\tau]\mathsf{E}[Y_1^-],$$

が成り立つことを示せる. これらを式(136) に代入すると, 式(134) を得る. □

例 **6.7 (**ギャンブラーの破産問題**)** ギャンブラーの最初の所持金を S_0 とする. ギャンブラーが賭けに勝てば所持金が a 増え, 負ければ b 減るものとする. n 回目の賭けの結果による所持金の増減額を Y_n とする. ただし, 各回の賭けにおける勝敗は独立に決まり, 勝つ確率は p, 負ける確率は $1-p$ であるとする. つまり,

$$\mathsf{P}(Y_n = a) = p, \qquad \mathsf{P}(Y_n = -b) = 1-p,$$

とする. このとき,

$$\mathsf{E}[Y_n] = pa - (1-p)b,$$

となる. 以下では, $pa-(1-p)b < 0$ を仮定する.

さて, S_n を, n 回目の賭けが終了したときの所持金額とすると,

$$S_n = S_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$

と表される. さらに, 最初の所持金を x ($x > 0$) としたときの破産時刻を $T(x)$ とする. すなわち, $T(x) = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n \le 0\}$ とする. 明らかに, 破産時刻 $T(x)$ は $\{S_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ に対する停止時刻である.

よって, Wald の補題を用いると,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[S_{T(x)} \mid S_0 = x] &= x + \mathsf{E}[Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{T(x)}] \\ &= x + \mathsf{E}[T(x)]\mathsf{E}[Y_1] \\ &= x + \mathsf{E}[T(x)]\{pa - (1-p)b\},\end{aligned}$$

を得る. また, $T(x)$ は破産時刻であったので, $S_{T(x)} \leq 0$ である したがって,

$$x + \mathsf{E}[T(x)]\{pa - (1-p)b\} \leq 0,$$

となり, 破産時刻の期待値 $\mathsf{E}[T(x)]$ に関する次の不等式が導かれる.

$$\mathsf{E}[T(x)] \geq \frac{x}{(1-p)b - pa}.$$

よって, 所持金 x でこの賭けを始めると, 平均 $\left\lceil \dfrac{x}{(1-p)b - pa} \right\rceil$ 回目で破産する.

6.9 強マルコフ性

表記を簡単にするため, $\{X_\ell; 0 \le \ell \le n\}$の全て, あるいは, 一部を用いて表現される任意の事象を$\mathcal{A}_0^n$と定義する.

定義 6.7 (強マルコフ性) 状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$が, その停止時刻$\tau$について,次式を満たすとき, 強マルコフ性をもつという.

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}(X_{\tau+1} = j \mid X_\tau = i, \mathcal{A}_0^{\tau-1}) \\ &\quad = \mathsf{P}(X_{\tau+1} = j \mid X_\tau = i), \quad i, j \in \mathbb{S}. \end{aligned} \tag{137}$$

つまり, 強マルコフ性とは, マルコフ性の定義における「現在の時刻」を停止時刻に置き換えても成り立つ性質のことをいう.

定理 6.11 状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$は強マルコフ性をもち, 次式が成り立つ.

$$\mathsf{P}(X_{\tau+1} = j \mid X_\tau = i, \mathcal{A}_0^{\tau-1}) = P_{i,j}, \quad i, j \in \mathbb{S}. \tag{138}$$

証明　式(137)の左辺は次のように書き換えられる.

$$\mathsf{P}(X_{\tau+1}=j \mid X_\tau=i,\mathcal{A}_0^{\tau-1})=\frac{\mathsf{P}(X_{\tau+1}=j,X_\tau=i \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1})}{\mathsf{P}(X_\tau=i \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1})}. \tag{139}$$

停止時刻τの値で場合分けを行い, 式(139)の右辺の分子を変形する.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(X_{\tau+1}=j,X_\tau=i \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1})\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}(X_{\tau+1}=j,X_\tau=i,\tau=k \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1})\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}(X_{\tau+1}=j \mid X_\tau=i,\tau=k,\mathcal{A}_0^{\tau-1})\\
&\qquad\times\mathsf{P}(X_\tau=i,\tau=k \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1})\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}(X_{k+1}=j \mid X_k=i,\tau=k,\mathcal{A}_0^{k-1})\\
&\qquad\times\mathsf{P}(X_\tau=i,\tau=k \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1}).
\end{aligned} \tag{140}$$

ここで, 停止時刻の定義より, 事象 $\{\tau = k\}$ は $\{X_\ell; 0 \le \ell \le k\}$ だけで決定され, X_{k+1} とは独立である. よって, 次式が成り立つ.

$$\mathsf{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i, \tau = k, \mathcal{A}_0^{k-1}) = \mathsf{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i) = P_{i,j}.$$

これを式(140)に代入すると,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(X_{\tau+1} = j, X_\tau = i \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1}) \\
&\quad = P_{i,j} \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X_\tau = i, \tau = k \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1}) \\
&\quad = P_{i,j} \mathsf{P}(X_\tau = i \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1}),
\end{aligned}$$

を得る. さらに, これを式(139)の右辺に代入すると, 次のようになる.

$$\mathsf{P}(X_{\tau+1} = j \mid X_\tau = i, \mathcal{A}_0^{\tau-1}) = \frac{P_{i,j}\mathsf{P}(X_\tau = i \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1})}{\mathsf{P}(X_\tau = i \mid \mathcal{A}_0^{\tau-1})} = P_{i,j}. \quad (141)$$

なお, これまでの議論は, $\mathcal{A}_0^{\tau-1} = \varnothing$ としても成立するので, 次式を得る.

$$\mathsf{P}(X_{\tau+1} = j \mid X_\tau = i) = P_{i,j}. \quad (142)$$

よって, 式(141)と(142)をあわせると, 式(138)が導かれる. □

強マルコフ性については, 定理 6.11 より強い次の結果が成り立つ.

定理 6.12 推移確率行列$\boldsymbol{P}$をもつ状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$を考える. 確率変数$\tau$をマルコフ連鎖$\{X_n\}$に関する停止時刻とするとき, $X_\tau = i \in \mathbb{S}$が与えられたという条件のもとで, 以下の2つが成立する.

(i) $\{X_n; n \ge \tau + 1\}$は$\boldsymbol{P}$を推移確率行列にもつマルコフ連鎖となる.

(ii) $\{X_n; n \ge \tau + 1\}$と$\{X_n; 0 \le n \le \tau - 1\}$は独立である.

定理 6.12 の証明　集合$\mathbb{S}_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$)を状態空間$\mathbb{S}$の任意の部分集合とする. さらに, 事象$\mathcal{S}_m$ ($m \in \mathbb{Z}_+$)を

$$\mathcal{S}_m = \{X_n \in \mathbb{S}_n; n = m, m+1, \dots\},$$

と定義する. このとき, 次式が成り立つ.

$$\mathsf{P}(\mathcal{S}_{\tau+1} \mid X_\tau = i, \mathcal{A}_0^{\tau-1}) = \frac{\mathsf{P}(\mathcal{S}_{\tau+1}, X_\tau = i, \mathcal{A}_0^{\tau-1})}{\mathsf{P}(X_\tau = i, \mathcal{A}_0^{\tau-1})}. \tag{143}$$

以下, 定理 6.11 の証明において, 事象$\{X_{\tau+1} = j\}$を$\mathcal{S}_{\tau+1}$に置き換えて, その議論をなぞれば, 次式が示される.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(\mathcal{S}_{\tau+1} \mid X_\tau = i, \mathcal{A}_0^{\tau-1}) &= \mathsf{P}(\mathcal{S}_{\tau+1} \mid X_\tau = i) \\
&= \mathsf{P}(\mathcal{S}_1 \mid X_0 = i).
\end{aligned}
$$

よって, $\{X_\tau = i\}$が与えられたとき, 時刻$\tau + 1$以降の任意の事象は, τ以前の任意の事象$\mathcal{A}_0^{\tau-1}$とは独立で, かつ, 時刻をτだけ左にシフトした事象と生起確率が同じである. つまり, これは本定理の主張が正しいことを意味する. □

系 **6.13** 状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$が状態$i_* \in \mathbb{S}$から推移を始め, 確率1で状態$i_*$を無限回訪問すると仮定する. このとき, 状態$i_*$への訪問時間間隔は独立同一に分布する.

証明 強マルコフ性より, 明らか. □

6.10 初到達確率

以下では, 次のような表記を用いる.

$$\mathsf{P}_i(\,\cdot\,) = \mathsf{P}(\,\cdot \mid X_0 = i), \quad \mathsf{E}_i[\,\cdot\,] = \mathsf{E}[\,\cdot \mid X_0 = i].$$

- τ_j ($j \in \mathbb{S}$): 状態jへの初到達時刻(確率変数)

$$\tau_j = \min\{n \in \mathbb{N}; X_n = j\}.$$

- 事象$\{X_0 = j\}$の下で, τ_jを状態jの再帰時間とよぶ.
- $F_{i,j}^{(n)}$($n \in \mathbb{N}$, $i, j \in \mathbb{S}$): n回の推移で初めて状態iからjに到達する確率

$$F_{i,j}^{(n)} = \mathsf{P}(\tau_j = n \mid X_0 = i).$$

- $F_{i,j}$ ($i, j \in \mathbb{S}$): 有限回の推移で状態iからjに到達する確率

$$F_{i,j} := \mathsf{P}(\tau_j < \infty \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(\tau_j = n \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{i,j}^{(n)}.$$

補題 6.14 任意の$n \in \mathbb{N}$と$i, j \in \mathbb{S}$に対して, 次式が成り立つ.

$$P_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} F_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)}. \tag{144}$$

証明　状態jに初めて到達する時刻$k \in \{1, 2, \ldots, n\}$で場合分けを行うと,

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{(n)} &= \mathsf{P}_i(X_n = j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}_i(\tau_j = k, X_n = j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}_i(X_k = j, \tau_j = k, X_n = j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}_i(X_k = j, \tau_j = k)\mathsf{P}_i(X_n = j \mid X_k = j, \tau_j = k) \end{aligned} \tag{145}$$

初到達時刻τ_jは, マルコフ連鎖$\{X_n\}$の停止時刻なので, 強マルコフ性より,

$$\mathsf{P}_i(X_n = j \mid X_k = j, \tau_j = k) = \mathsf{P}(X_n = j \mid X_k = j).$$

これを式(145)に代入すると, 次のようにして式(144)が得られる.

$$\begin{aligned} P_{i,j}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(X_k = j, \tau_j = k \mid X_0 = i)\mathsf{P}(X_n = j \mid X_k = j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} F_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)}. \end{aligned}$$

□

6.11 再帰性

定常分布の存在に深く関わる概念である再帰性の定義を与える.

定義 6.8 (再帰性)

(i) $F_{i,i} = 1$(状態 i の再帰時間が確率 1 で有限) であるとき, 状態 i は再帰的であるという.

(ii) $F_{i,i} < 1$ のとき, 状態 i は過渡的であるという.

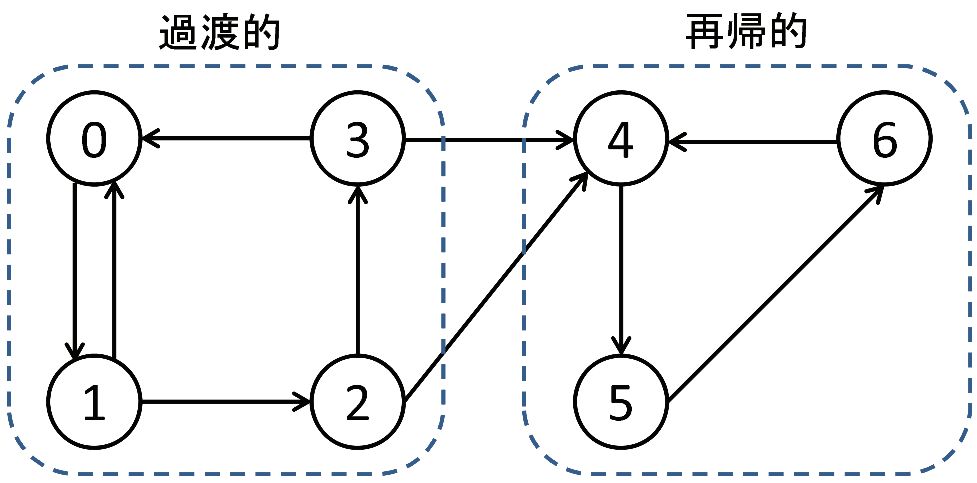
定義より, 状態 i が再帰的であるならば, 状態 i からスタートしたマルコフ連鎖は確率 1 で再び状態 i に戻ることができる. また, 状態 i が再帰的であるとき, 自身への平均再帰時間が有限であるか否かで, 以下のように二通りに特徴づけがなされる.

定義 6.9

(i) $F_{i,i} = 1$ かつ $\mathrm{E}_i[\tau_i] < \infty$ のとき, 状態 i は正再帰的であるという.

(ii) $F_{i,i} = 1$ かつ $\mathrm{E}_i[\tau_i] = \infty$ のとき, 状態 i は零再帰的であるという.

例 **6.8** 下図で示されるような連結構造をもつマルコフ連鎖を考える.



- 状態群 $\{4,5,6\}$ は閉じているので再帰的である.
- 状態群 $\{0,1,2,3\}$ から推移を開始すると, いずれ状態群 $\{4,5,6\}$ に吸い込まれ, 再び状態群 $\{0,1,2,3\}$ に戻ることはないので過渡的である.

定理 **6.15** 集合 $\mathbb{C}$ をマルコフ連鎖 $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ の再帰的な連結クラスとする. このとき, 任意の状態 $i, j \in \mathbb{C}$ に対して, 次式が成り立つ.

$$\mathsf{P}_j(\tau_i < \infty) = 1.$$

証明　背理法で証明する. 次式が成り立つと仮定する.

$$\mathsf{P}_j(\tau_i = \infty) > 0. \tag{146}$$

状態 i, j は同一の連結クラスに含まれるので, 次式を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在する.

$$\mathsf{P}_i(\tau_i > m, X_m = j) > 0, \tag{147}$$

さて, 確率 $\mathsf{P}_i(\tau_i = \infty)$ を次のように下から評価する.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_i(\tau_i = \infty) &\geq \mathsf{P}_i(\tau_i = \infty, X_m = j) \\ &= \mathsf{P}_i(\tau_i > m, \tau_i = \infty, X_m = j) \\ &= \mathsf{P}_i(\tau_i > m, X_m = j) \\ &\quad \times \mathsf{P}_i(\tau_i = \infty \mid \tau_i > m, X_m = j). \end{aligned} \tag{148}$$

上式右辺の2つ目の確率は次のように変形できる.

$$\begin{aligned} &\mathsf{P}_i(\tau_i = \infty \mid \tau_i > m, X_m = j) \\ &= \mathsf{P}_i(\cap_{n=0}^{\infty}\{\tau_i > n\} \mid \tau_i > m, X_m = j) \\ &= \mathsf{P}_i(\cap_{n=m}^{\infty}\{\tau_i > n\} \mid \tau_i > m, X_m = j) \\ &= \mathsf{P}_i(\cap_{n=0}^{\infty}\{\tau_i - m > n\} \mid \tau_i > m, X_m = j). \end{aligned} \tag{149}$$

また, τ_i はマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ に対する停止時刻であるので, 強マルコフ性から,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_i(\cap_{n=0}^{\infty}\{\tau_i - m > n\} \mid \tau_i > m, X_m = j) \\
&= \mathsf{P}(\cap_{n=0}^{\infty}\{\tau_i - m > n\} \mid \tau_i > m, X_m = j),
\end{aligned}$$

となって, さらに斉時性から, 時刻を m だけ左にシフトすると,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_i(\cap_{n=0}^{\infty}\{\tau_i - m > n\} \mid \tau_i > m, X_m = j) \\
&= \mathsf{P}(\cap_{n=0}^{\infty}\{\tau_i > n\} \mid \tau_i > 0, X_0 = j) \\
&= \mathsf{P}_j(\cap_{n=0}^{\infty}\{\tau_i > n\}) = \mathsf{P}_j(\tau_i = \infty). \qquad (150)
\end{aligned}$$

式 (150) を (149) に代入すると,

$$\mathsf{P}_i(\tau_i = \infty \mid \tau_i > m, X_m = j) = \mathsf{P}_j(\tau_i = \infty) > 0, \qquad (151)$$

を得る. ただし, 最後の不等号では (146) を用いた. よって, 式 (147) と (149) を, 式 (148) の右辺に適用すると, $\mathsf{P}_i(\tau_i = \infty) > 0$ となるので, 状態 i が再帰的であることに反する. よって, 背理法の仮定 (146) は否定され, $\mathsf{P}(\tau_i = \infty \mid X_0 = j) = 0$, すなわち,

$$\mathsf{P}(\tau_i < \infty \mid X_0 = j) = 1,$$

が成り立つ. □

再帰性の定義と系 6.13 より, 直ちに次の結果を得る.

定理 **6.16** 状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$が既約かつ再帰的であるとき, 状態$i_*$の再帰時間列は独立同一に分布する.

6.12　基礎行列と再帰性

定義 6.10　次式で定義される行列 $\boldsymbol{S} := (S_{i,j})_{i,j\in\mathbb{S}}$ は基礎行列(fundamental matrix)とよばれる.

$$\boldsymbol{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{P}^n$$

次の定理は, 基礎行列 $\boldsymbol{S}$ と再帰性との関係について述べている.

定理 6.17　基礎行列 $\boldsymbol{S}$ について, 次の(i), (ii) が成立する.

(i) 状態 j が再帰的であることと, $S_{j,j} = \infty$ は等価である.

(ii) $F_{i,j} > 0$, すなわち, 状態 i から j へ到達可能であるとき,

$$S_{j,j} = \infty \Longleftrightarrow S_{i,j} = \infty$$

証明　任意の$i, j \in \mathbb{S}$に対して,

$$\widehat{P}_{i,j}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{i,j}^{(n)}, \quad \widehat{F}_{i,j}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n F_{i,j}^{(n)}, \tag{152}$$

とおく. $P_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}$ (ただし, $\delta_{i,j}$ は Kronecker delta を表す) と式(144) を用いると,

$$\begin{aligned}\widehat{P}_{i,j}(z) &= \delta_{i,j} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=1}^{n} F_{i,j}^{(k)} P_{j,j}^{(n-k)} \\ &= \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k F_{i,j}^{(k)} \sum_{n=k}^{\infty} z^{n-k} P_{j,j}^{(n-k)} \\ &= \delta_{i,j} + \widehat{F}_{i,j}(z)\widehat{P}_{j,j}(z), \end{aligned} \tag{153}$$

となる. ここで, $i = j$ として, 式(153) を $\widehat{P}_{j,j}(z)$ について解くと,

$$\widehat{P}_{j,j}(z) = \frac{1}{1 - \widehat{F}_{j,j}(z)}, \tag{154}$$

が得られる. ここで,

$$\lim_{z \uparrow 1} \widehat{P}_{i,j}(z) = S_{i,j}, \quad \lim_{z \uparrow 1} \widehat{F}_{i,j}(z) = F_{i,j},$$

が成り立つことに注意すると, 式(154)より次式を得る.

$$S_{j,j} = \frac{1}{1 - F_{j,j}}.$$

したがって, 再帰性の定義より,

$$\text{状態}\, j \,\text{が再帰的} \iff F_{j,j} = 1 \iff S_{j,j} = \infty$$

となり, 主張(i)が示された.

次に主張(ii)を示す. 式(153)において, $z \uparrow 1$とすると,

$$S_{i,j} = \delta_{i,j} + F_{i,j} S_{j,j},$$

となるので, $F_{i,j} > 0$ であるとき, $S_{j,j} = \infty$と$S_{i,j} = \infty$は等価である. □

系 **6.18** 状態jが過渡的であるとき, 次の(i), (ii)が成立する.

(i) $\lim_{n\to\infty} P_{j,j}^{(n)} = 0$

(ii) $F_{i,j} > 0$であるとき, $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = 0$

証明　定理 6.17 の主張(i) より, 状態 j が過渡的であるとき,

$$S_{j,j} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{j,j}^{(n)} < \infty,$$

となる. よって, $\lim_{n\to\infty} P_{j,j}^{(n)} = 0$ が成り立つ.

同様に, 状態 j が過渡的でかつ $F_{i,j} > 0$ であるとき, 定理 6.17 の主張(ii) より,

$$S_{i,j} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{i,j}^{(n)} < \infty,$$

となるので, $\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = 0$ が成立する. □

系 **6.19**　推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ が既約であり, すべての状態 j が過渡的であるとき, 次式が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{O}.$$

定理 6.20 状態$i, j \in \mathbb{S}$が互いに到達可能であるとき, 状態i, jは, 再帰性, 正再帰性, 零再帰性といった性質を共有する.

証明　状態$i, j \in \mathbb{S}$が互いに到達可能であることから, $P_{i,j}^{(M)} > 0$, $P_{j,i}^{(N)} > 0$を満たす$M, N \in \mathbb{N}$が存在する. このとき,

$$P_{i,i}^{(M+n+N)} \geq P_{i,j}^{(M)} P_{j,j}^{(n)} P_{j,i}^{(N)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \tag{155}$$

が成り立つので, これを用いて次式を得る.

$$\begin{aligned} S_{i,i} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{i,i}^{(n)} \geq \sum_{n=0}^{\infty} P_{i,i}^{(M+n+N)} &\geq P_{i,j}^{(M)} \sum_{n=0}^{\infty} P_{j,j}^{(n)} \cdot P_{j,i}^{(N)} \\ &= P_{i,j}^{(M)} S_{j,j} P_{j,i}^{(N)}. \end{aligned}$$

これと, $P_{i,j}^{(M)} > 0$および$P_{j,i}^{(N)} > 0$から,

$$S_{i,i} = \infty \Longleftrightarrow S_{j,j} = \infty,$$

となるので, 定理 6.17より, 互いに到達可能な状態の再帰性は等価である.

次に, 正再帰性に関する同様の主張を証明する. そのため,

$$\widehat{G}_{i,i}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} z^n F_{i,i}^{(m)},$$

とおくと,

$$\lim_{z \uparrow 1} \widehat{G}_{i,i}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m F_{i,i}^{(m)} = \mathsf{E}[\tau_i \mid X_0 = i], \quad \forall i \in \mathbb{S}, \tag{156}$$

となる. また, $\widehat{G}_{i,i}(z)$ の定義から, 次式を得る.

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_{i,i}(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} F_{i,i}^{(m)} \sum_{n=1}^{m} z^n \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} F_{i,i}^{(m)} \frac{1 - z^m}{1 - z} z = z \frac{1 - \widehat{F}_{i,i}(z)}{1 - z} \\
&= \frac{z}{1 - z} \frac{1}{\widehat{P}_{i,i}(z)}.
\end{aligned} \tag{157}$$

ただし, 最後の等号では, 式(154) において $j = i$ とした等式を用いた.

さらに, 式(157) を $\widehat{P}_{i,i}(z)$ について解くと,

$$\widehat{P}_{i,i}(z) = \frac{z}{1-z}\frac{1}{\widehat{G}_{i,i}(z)}, \tag{158}$$

となる. 一方, 式(155) から,

$$\begin{aligned}\widehat{P}_{i,i}(z) &\geq \sum_{n=0}^{\infty} z^{M+n+N} P_{i,i}^{(M+n+N)} \\ &\geq z^{M+N} P_{i,j}^{(M)} \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{j,j}^{(n)} \cdot P_{j,i}^{(N)} \\ &= z^{M+N} P_{i,j}^{(M)} \widehat{P}_{j,j}(z) P_{j,i}^{(N)},\end{aligned}$$

が得られるので, その両辺の $\widehat{P}_{i,i}(z)$ と $\widehat{P}_{j,j}(z)$ に, 式(158) を適用すると

$$\frac{z}{1-z}\frac{1}{\widehat{G}_{i,i}(z)} \geq z^{M+N} P_{i,j}^{(M)} \frac{z}{1-z}\frac{1}{\widehat{G}_{j,j}(z)} P_{j,i}^{(N)},$$

となるが, これを整理して次式を得る.

$$\widehat{G}_{j,j}(z) \geq z^{M+N} P_{i,j}^{(M)} \widehat{G}_{i,i}(z) P_{j,i}^{(N)}.$$

したがって, 上の不等式と式(156)より,

$$\lim_{z\uparrow 1}\widehat{G}_{i,i}(z)=\mathsf{E}[\tau_i \mid X_0=i]<\infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{z\uparrow 1}\widehat{G}_{j,j}(z)=\mathsf{E}[\tau_j \mid X_0=j]<\infty$$

となる. 以上の議論はiとjを入れ替えても成立するので,

$$\mathsf{E}[\tau_i \mid X_0=i]<\infty \Longleftrightarrow \mathsf{E}[\tau_j \mid X_0=j]<\infty$$

である. つまり, 互いに到達可能な状態の正再帰性は等価である. よって, 零再帰性についても同様のことが言える. $\square$

6.13 Class Property

既約なマルコフ連鎖では, すべての状態が互いに到達可能であるので, 定理 6.20 より, 直ちに次の結果を得る.

命題 6.21 既約なマルコフ連鎖では,

ある状態 $i \in \mathbb{S}$ が過渡的(再帰的/正再帰的/零再帰的)

$\Longrightarrow$ すべての状態が過渡的(再帰的/正再帰的/零再帰的)

定義 6.11 マルコフ連鎖のすべての状態が過渡的(再帰的/正再帰的/零再帰的)とき, マルコフ連鎖(推移確率行列)は過渡的(再帰的/正再帰的/零再帰的)という.

6.14 定常測度と定常分布

- 定常測度ベクトル: $\boldsymbol{x}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{x}$ をみたす非負行ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{S}}$
- 定常分布ベクトル: $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$ をみたす確率ベクトル $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{i \in \mathbb{S}}$
  - 定常分布ベクトルは定常測度ベクトルでもある.
  - 定常分布ベクトルは定常分布とよばれることもある.

次の例が示すように, 定常分布ベクトルは一意であるとは限らない.

例 **6.9** 次のような推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ を考える.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

確率ベクトル $\boldsymbol{\pi} = \xi(1/3, 2/3, 0, 0) + (1-\xi)(0, 0, 1/2, 1/2)$ $(0 \le \forall\xi \le 1)$ は $\boldsymbol{P}$ の定常分布ベクトルとなる.

6.15　可逆測度と詳細釣り合い方程式

定義 6.12 ゼロではない非負ベクトル $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i \in \mathbb{S}}$ が

$$\mu_i P_{i,j} = \mu_j P_{j,i}, \qquad i, j \in \mathbb{S}, \tag{159}$$

を満たすとき, 推移確率行列 $\boldsymbol{P} = (P_{i,j})_{i,j \in \mathbb{S}}$ に対する可逆測度ベクトルとよぶ. また, 式(159)を詳細釣り合い方程式よぶ.

定理 6.22 可逆測度ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ は定常測度ベクトルである.

証明　式(159)の両辺を $i \in \mathbb{S}$ について総和を取ると, 任意の $j \in \mathbb{S}$ に対して次式が成り立つ.

$$\sum_{i \in \mathbb{S}} \mu_i P_{i,j} = \mu_j \sum_{i \in \mathbb{S}} P_{j,i} = \mu_j.$$

これは, 可逆測度ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ が推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ の定常測度ベクトルであることを意味している. □

6.16 出生死滅過程の可逆測度

定義 6.13 次のような推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ をもつマルコフ連鎖 $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ を出生死滅過程とよぶ.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{160}$$

ただし, $q_0 = 0$, $r_i = 1 - p_i - q_i$ $(i \in \mathbb{Z}_+)$ とする.

出生死滅過程は, 一回の推移で高々1ずつしか変化しない.

$$P_{i,j} = \mathsf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} p_i, & i \in \mathbb{Z}_+, \\ r_i, & i \in \mathbb{Z}_+, \\ q_i, & i \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{その他}. \end{cases} \tag{161}$$

式(160)で与えられる $\boldsymbol{P}$ に関する平衡方程式 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{x}$ を書き下すと, 次のように

なる.

$$x_0(1-p_0)+x_1q_1=x_0,$$
$$x_{i-1}p_{i-1}+x_i(1-p_i-q_i)+x_{i+1}q_{i+1}=x_i, \qquad i\in\mathbb{N}.$$

これらを整理すると,

$$x_1q_1-x_0p_0=0,$$
$$x_{i+1}q_{i+1}-x_ip_i=x_iq_i-x_{i-1}p_{i-1}, \qquad i\in\mathbb{N}.$$

となって,

$$x_iq_i=x_{i-1}p_{i-1}, \qquad i\in\mathbb{N}, \tag{162}$$

を得る. よって式(161)を適用すると,

$$x_iP_{i,i-1}=x_{i-1}P_{i-1,i}, \qquad i\in\mathbb{N},$$

となり, 式(162)は, 出生死滅過程の詳細釣り合い方程式であることがわかる.

以下, 出生死滅過程の可逆測度から, 定常分布ベクトルを求める. $x_0 = 1$とおくと, 詳細釣り合い方程式(162)から,

$$x_i = \frac{p_{i-1}}{q_i} x_{i-1} = \cdots = \prod_{j=1}^{i} \frac{p_{j-1}}{q_j}, \qquad i \in \mathbb{N},$$

となる. 定理 6.22より, 上で定められる非負ベクトル$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$は, 式(160)で与えられる$\boldsymbol{P}$の定常測度ベクトルである. したがって,

$$C := \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{p_{j-1}}{q_j} < \infty, \tag{163}$$

が成り立つとき, 定常測度ベクトル$\boldsymbol{x}$は正規化することができ, 次のように定常分布ベクトル$\boldsymbol{\pi} = (\pi_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$を構成することができる.

$$\pi_0 = \frac{1}{C+1}, \qquad \pi_k = \frac{1}{C+1} \prod_{j=1}^{k} \frac{p_{j-1}}{q_j}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

6.17 定常測度の構成

補題 6.23 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ をもつ状態空間 $\mathbb{S}$ 上のマルコフ連鎖 $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ が既約であるとする．さらに，任意に固定された状態 $s \in \mathbb{S}$ に対して，${}_{\{s\}}\boldsymbol{x} = ({}_{\{s\}}x_i)_{i\in\mathbb{S}}$ を次のように定義する．

$$ {}_{\{s\}}x_i = \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{\tau_s} \mathbb{1}(X_n = i)\right], \quad i \in \mathbb{S}. \tag{164} $$

このとき，以下の (i), (ii) が成り立つ．

(i) ${}_{\{s\}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{P} \le {}_{\{s\}}\boldsymbol{x}$

(ii) ${}_{\{s\}}x_i \in [0,\infty)$ $(\forall i \in \mathbb{S})$

注意 6.4 上の補題の (i), (ii) を満たす非負ベクトル ${}_{\{s\}}\boldsymbol{x}$ は，$\boldsymbol{P}$ に関する劣不変ベクトルとよばれる．また，式 (164) の右辺は，時間区間 $[1,\tau_s]$ における状態 i への平均訪問回数に等しい．なお，定義より，${}_{\{s\}}x_s = 1$ であるので，${}_{\{s\}}x_i$ は，状態 s への訪問頻度を基準にしたときの状態 i への相対訪問頻度と解釈できる．

補題 6.23 の証明　まず, 主張 (i) を示す. 式 (164) より,

$$
\begin{aligned}
{}_{\{s\}}x_i &= \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(X_n = i, n \le \tau_s)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}_s[\mathbb{1}(X_n = i, n \le \tau_s)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}_s(X_n = i, n \le \tau_s), \qquad (165)
\end{aligned}
$$

となる. ここで, 任意に固定された $s \in \mathbb{S}$ に対して,

$$
{}_{\{s\}}P_{s,j}^{(n)} = \mathsf{P}_s(X_n = i, n \le \tau_s), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \ j \in \mathbb{S},
$$

と定義すると, ${}_{\{s\}}x_i$ は次のように表現できる.

$$
{}_{\{s\}}x_i = \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\{s\}}P_{s,i}^{(n)}, \qquad i \in \mathbb{S}. \qquad (166)
$$

さて, ${}_{\{s\}}P_{i,j}^{(n)}$ の定義から, 次式が成り立つ.

$$
{}_{\{s\}}P_{s,i}^{(1)} = \mathsf{P}_s(X_1 = i, 1 \le \tau_s) = \mathsf{P}_s(X_1 = i) = P_{s,i}. \qquad (167)
$$

また, $n \geq 2$ のときには,

$$
\begin{aligned}
{}_{\{s\}}P_{s,i}^{(n)} &= \mathsf{P}_s(X_n = i, n \leq \tau_s) \\
&= \mathsf{P}_s(X_n = i, X_{n-1} \neq s, n \leq \tau_s) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{s\}} \mathsf{P}_s(X_n = i, {\color{red} X_{n-1} = j}, {\color{blue} n-1 \leq \tau_s}) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{s\}} \mathsf{P}_s(X_{n-1} = j, n-1 \leq \tau_s) \\
&\qquad\qquad \times \mathsf{P}_s(X_n = i \mid X_{n-1} = j, n-1 \leq \tau_s) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{s\}} \mathsf{P}_s(X_{n-1} = j, n-1 \leq \tau_s) \\
&\qquad\qquad \times \mathsf{P}(X_n = i \mid X_{n-1} = j) \qquad \text{(強マルコフ性より)} \\
&= \sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{s\}} {}_{\{s\}}P_{s,j}^{(n-1)} P_{j,i}.
\end{aligned} \tag{168}
$$

式(167)と(168)を式(166)に代入すると

$$
{}_{\{s\}}x_i = P_{s,i} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{s\}} {}_{\{s\}}P_{s,j}^{(n-1)} P_{j,i}
$$

$$
\begin{aligned}
&= P_{s,i} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{s\}} {}_{\{s\}}P_{s,j}^{(n)} P_{j,i} \\
&= P_{s,i} + \sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{s\}} \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\{s\}}P_{s,j}^{(n)} \cdot P_{j,i} \\
&\geq {}_{\{s\}}x_s P_{s,i} + \sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{s\}} \sum_{n=1}^{\infty} {}_{\{s\}}P_{s,j}^{(n)} P_{j,i}. \qquad (169)
\end{aligned}
$$

最後の不等号では ${}_{\{s\}}x_s \leq 1$ を用いた. さらに, 式(166) を (169) に代入すると,

$$
{}_{\{s\}}x_i \geq {}_{\{s\}}x_s P_{s,i} + \sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{s\}} {}_{\{s\}}x_j P_{j,i} = \sum_{j \in \mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_j \cdot P_{j,i}, \qquad i \in \mathbb{S}. \quad (170)
$$

したがって, 主張 (i) が示された.

次に, 主張(ii)を, ${}_{\{s\}}x_i > 0$と${}_{\{s\}}x_i < \infty$に分けて証明する. 最初に, ${}_{\{s\}}x_i > 0$の証明から始める. 式(170)より, 次式が成り立つ.

$$
{}_{\{s\}}x_i \ge P_{s,i}^{(n)} \ge 0.
$$

ここで, ある$i \in \mathbb{S}$に対して${}_{\{s\}}x_i = 0$とすると, 上の式より, すべての$n \in \mathbb{N}$に対して, $P_{s,i}^{(n)} = 0$となってしまい, $\boldsymbol{P}$ の既約性に反する. よって, すべての$i \in \mathbb{S}$に対して, ${}_{\{s\}}x_i > 0$となる.

今度は, ${}_{\{s\}}x_i < \infty$を示す. 不等式$1 \ge {}_{\{s\}}x_s$と${}_{\{s\}}\boldsymbol{x} \ge {}_{\{s\}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{P}^n$から,

$$
1 \ge {}_{\{s\}}x_s \ge \sum_{j \in \mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_j P_{j,s}^{(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{171}
$$

を得る. 式(171)より,

$$
1 \ge {}_{\{s\}}x_j P_{j,s}^{(n)},
$$

となるので, ある$j \in \mathbb{S}$に対して, ${}_{\{s\}}x_j = \infty$とすると, 上の式より, すべての$n \in \mathbb{N}$に対して, $P_{j,s}^{(n)} = 0$となる必要がある. しかし, これも$\boldsymbol{P}$の既約性に反する. よって, すべての$i \in \mathbb{S}$に対して, ${}_{\{s\}}x_i < \infty$である. □

補題 6.23 を用いると, 次の定理を示すことができる.

定理 6.24 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ をもつ状態空間 $\mathbb{S}$ 上のマルコフ連鎖 $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ が既約かつ再帰的であるとする. さらに, 任意に固定された状態 $s \in \mathbb{S}$ に対して, 式(164) で定義される ${}_{\{s\}}\boldsymbol{x} = ({}_{\{s\}}x_i)_{i \in \mathbb{S}}$ は, 以下の (i), (ii), (iii) が成り立つ.

(i) ${}_{\{s\}}\boldsymbol{x}$ は, $\boldsymbol{P}$ の定常測度ベクトルである.

(ii) ${}_{\{s\}}x_i \in (0, \infty)$ ($\forall i \in \mathbb{S}$)

(iii) $\boldsymbol{P}$ が正再帰的であることと, $\sum_{i \in \mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_i < \infty$ は等価である.

注意 6.5 既約性は, 式(164) で与えられる定常測度ベクトルのすべての成分が正であることを示すのに用いられる.

注意 6.6 $\boldsymbol{P}$ が正再帰的であるとき, 定常測度ベクトル ${}_{\{s\}}\boldsymbol{x}$ を正規化することで, 定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ を構成できる.

$$\pi_i = \frac{{}_{\{s\}}x_i}{\sum_{j \in \mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_j} > 0, \quad i \in \mathbb{S}.$$

定理 6.24 の証明

$$
\begin{aligned}
{}_{\{s\}}x_s &= \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{\tau_s} \mathbb{1}(X_n = s)\right] \\
&= \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(\tau_s \geq n \in \mathbb{N}, X_n = s)\right] \\
&= \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(\tau_s = n \in \mathbb{N}, X_n = s)\right] \\
&= \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(\tau_s = n \in \mathbb{N})\right] \\
&= \mathsf{E}_s[\mathbb{1}(\tau_s \in \mathbb{N})] = \mathsf{P}_s(\tau_s \in \mathbb{N}).
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{P}$ は正再帰的であるので, $\mathsf{P}_s(\tau_s \in \mathbb{N}) = 1$ である. したがって, ${}_{\{s\}}x_s = 1$ となり, 補題 6.23 の証明の式 (169) において, 等号が成立する. よって, 補題 6.23 の証明をなぞれば, 主張 (i), すなわち, ${}_{\{s\}}x_i = \sum_{j \in \mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_j \cdot P_{j,i}$ を示すことができる.

本定理の主張(ii)は, 補題 6.23の主張(ii)から明らかに成り立つので, 以下では, 主張(iii)を示す. 式(164)を用いて, ${}_{\{s\}}x_j$ ($j \in \mathbb{S}$)の総和を取ると,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_j &= \sum_{j\in\mathbb{S}} \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{\tau_s} \mathbb{1}(X_n = j)\right] \\ &= \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{\tau_s}\sum_{j\in\mathbb{S}} \mathbb{1}(X_n = j)\right] = \mathsf{E}_s[\tau_s]\,, \end{aligned} \tag{172}$$

となる. よって, 正再帰性の定義(定義 6.9)より, 主張(iii)は明らか. □

6.18 定常測度の一意性

定理 6.25 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ をもつ状態空間 $\mathbb{S}$ 上のマルコフ連鎖 $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ が既約かつ再帰的であるとき, 定常測度ベクトルは, 定数倍の自由度を残し一意に定まる.

注意 6.7 既約な推移確率行列の定常分布は, 存在するとしたら一意である.

定理 6.25 の証明　$\boldsymbol{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{S}}$ を $\boldsymbol{P}$ の定常測度ベクトルとすると, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{P}$ より, 任意に固定された $s \in \mathbb{S}$ に対して,

$$y_k = \sum_{j\in\mathbb{S}} y_j P_{j,k} = y_s P_{s,k} + \sum_{j\neq s} y_j P_{j,k}, \tag{173}$$

が得られる. 式(173) において, k を j に置き換えた式

$$y_j = y_s P_{s,j} + \sum_{\ell\neq s} y_\ell P_{\ell,j}$$

を式(173) の右辺に代入すると,

$$
\begin{aligned}
y_k &= y_s P_{s,k} + \sum_{j \neq s} \left(y_s P_{s,j} + \sum_{\ell \neq s} y_\ell P_{\ell,j} \right) P_{j,k} \\
&= y_s P_{s,k} + \sum_{j \neq s} y_s P_{s,j} P_{j,k} + \sum_{\ell \neq s} \sum_{j \neq s} y_\ell P_{\ell,j} P_{j,k} \\
&= y_s \mathsf{P}_s(X_1 = k, 1 \leq \tau_s) \\
&\qquad + y_s \mathsf{P}_s(X_2 = k, 2 \leq \tau_s) \\
&\qquad + \sum_{\ell \neq s} y_\ell \mathsf{P}_\ell(X_2 = k, 2 \leq \tau_s),
\end{aligned}
$$

となる. 同様の操作を繰り返すと, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次式が得られる.

$$
\begin{aligned}
y_k = y_s \sum_{m=1}^{n} \mathsf{P}_s(X_m = k, m \leq \tau_s) \\
+ \sum_{\ell \neq s} y_\ell \mathsf{P}_\ell(X_n = k, n \leq \tau_s).
\end{aligned}
\tag{174}
$$

式(174)を帰納法で示す. そこで, 式(174)がある $n \in \mathbb{N}$ に対して成立しているとし, その右辺第2項に, 式(173)で $k = \ell$ としたものを代入すると,

$$
\begin{aligned}
y_k &= y_s \sum_{m=1}^{n} \mathsf{P}_s(X_m = k, m \le \tau_s) \\
&\quad + \sum_{\ell \ne s} \left({\color{red} y_s P_{s,\ell}} + {\color{blue} \sum_{j \ne s} y_j P_{j,\ell}} \right) \mathsf{P}_\ell(X_n = k, n \le \tau_s) \\
&= y_s \sum_{m=1}^{n} \mathsf{P}_s(X_m = k, m \le \tau_s) + {\color{red} y_s} \sum_{\ell \ne s} {\color{red} P_{s,\ell}} \mathsf{P}_\ell(X_n = k, n \le \tau_s) \\
&\quad + {\color{blue} \sum_{j \ne s} y_j} \sum_{\ell \ne s} {\color{blue} P_{j,\ell}} \mathsf{P}_\ell(X_n = k, n \le \tau_s). \qquad (175)
\end{aligned}
$$

任意の $i \in \mathbb{S}$ に対して,

$$
\sum_{\ell \ne s} P_{i,\ell} \mathsf{P}_\ell(X_n = k, n \le \tau_s) = \mathsf{P}_i(X_{n+1} = k, n+1 \le \tau_s),
$$

が成り立つので, これを式(175)の右辺第2,3項に適用すると,

$$
\begin{aligned}
y_k = y_s \sum_{m=1}^{n} \mathsf{P}_s(X_m = k, m \le \tau_s) \\
+ y_s \mathsf{P}_s(X_{n+1} = k, n+1 \le \tau_s) \\
+ \sum_{j \ne s} y_j \mathsf{P}_j(X_{n+1} = k, n+1 \le \tau_s)
\end{aligned}
$$

$$= y_s \sum_{m=1}^{n+1} \mathsf{P}_s(X_m = k, m \leq \tau_s)$$
$$+ \sum_{j \neq s} y_j \mathsf{P}_j(X_{n+1} = k, n+1 \leq \tau_s).$$

これは, 式(174)の右辺においてnを$n+1$に置き換えたものに等しい. したがって, 帰納法により, 式(174)は任意の$n \in \mathbb{N}$に対して成り立つ.

さて, 式(174)の右辺の第2項を削除すると, 以下の不等式を得る.

$$y_k \geq y_s \sum_{m=1}^{n} \mathsf{P}_s(X_m = k, m \leq \tau_s).$$

上の不等式において, $n \to \infty$とすると,

$$y_k \geq y_s \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}_s(X_m = k, m \leq \tau_s) = y_s \cdot {}_{\{s\}}x_k, \quad k \in \mathbb{S}, \tag{176}$$

が得られる. ただし, 最後の等号では式(165)を用いた.

次に, 背理法により, 不等式(176) において等号が成立することを示す. そのため,

$$y_{k'} > y_s \cdot {}_{\{s\}}x_{k'}, \qquad \exists k' \in \mathbb{S}, \tag{177}$$

を仮定する. マルコフ連鎖の既約性から, この $k' \in \mathbb{S}$ に対して, $n \in \mathbb{N}$ を $P_{k',s}^{(n)} > 0$ となるような n が存在する. 以下, $n \in \mathbb{N}$ をそのように固定する. 以上の設定のもと, $y_s = \sum_{i\in\mathbb{S}} y_i P_{i,s}^{(n)}$ に対して, 式(176) と (177) を適用すると,

$$\begin{aligned} y_s &= \sum_{i\in\mathbb{S}} y_i P_{i,s}^{(n)} = y_{k'} P_{k',s}^{(n)} + \sum_{i\in\mathbb{S}\setminus\{k'\}} y_i P_{i,s}^{(n)} \\ &> y_s \cdot {}_{\{s\}}x_{k'} P_{k',s}^{(n)} + \sum_{i\in\mathbb{S}\setminus\{k'\}} y_s \cdot {}_{\{s\}}x_i P_{i,s}^{(n)} \\ &= y_s \sum_{i\in\mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_i P_{i,s}^{(n)}, \end{aligned}$$

となって, さらに, $\sum_{i\in\mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_i P_{i,s}^{(n)} = {}_{\{s\}}x_s = 1$ を用いると, $y_s > y_s$ が得られるが, これは矛盾である. したがって, 式(177) は否定され, 任意の $k \in \mathbb{S}$ に対して, 式(176) の等号が成立する.

以上の議論により, (176) の不等号を等号に変えると,

$$y_k = y_s \cdot {}_{\{s\}}x_k, \quad k \in \mathbb{S}, \tag{178}$$

となる. ここで, $y_s = 0$ とすると, すべての $k \in \mathbb{S}$ に対して, $y_k = 0$ となり, $\boldsymbol{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{S}}$ が定常測度であることに反する. よって, $y_s > 0$ となるので, 式(178) より, 任意の定常測度ベクトル $\boldsymbol{y}$ は, 固定された別の定常測度ベクトル ${}_{\{s\}}\boldsymbol{x}$ の定数倍となることがわかる. □

6.19 定常測度の存在と再帰性

定理 6.26 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ が既約であるとき, 次の2つは同値である.

(i) 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ が再帰的である.

(ii) 定常測度ベクトルが存在する.

また, 定常測度ベクトルが存在する場合には, 定数倍の自由度を残して一意に定まり, すべての成分は正となる.

証明　定理6.24と6.25より, $\boldsymbol{P}$ が既約かつ再帰的であるとき, 定常測度ベクトルは定数倍の自由度を残して一意に定まり, そのすべての成分は正かつ有限となる.

したがって, 以下では, 定常測度ベクトル $\boldsymbol{y} := (y_i)_{i\in\mathbb{S}}$ が存在するとしたときに, $\boldsymbol{P}$ が再帰的であることを示す. 定常測度ベクトルから, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\boldsymbol{y}\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{y}$ となる. すなわち, 次式が成り立つ.

$$\sum_{i\in\mathbb{S}} y_i P_{i,j}^{(n)} = y_j < \infty, \qquad j \in \mathbb{S}. \tag{179}$$

ここで, 既約な推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ が過渡的だとすると, 系 6.18より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と

$i, j \in \mathbb{S}$ に対して,

$$\lim_{n \to \infty} P_{i,j}^{(n)} = 0,$$

となるので, これと優収束定理を式(179) に適用すると,

$$y_j = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in \mathbb{S}} y_i P_{i,j}^{(n)} = \sum_{i \in \mathbb{S}} y_i \lim_{n \to \infty} P_{i,j}^{(n)} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{S},$$

が得られ, $\boldsymbol{y}$ が定常測度であることに矛盾する. よって, $\boldsymbol{P}$ は過渡的ではなく, 再帰的である. $\square$

6.20　定常分布と正再帰性

定理 6.27 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ が既約であるとき, 次の2つは同値である.

(i) 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ が正再帰的である.

(ii) 定常分布ベクトルが存在する.

また, 定常分布ベクトルが存在する場合には一意に定まり, すべての成分は正となる.

推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ が既約であるとき, 定常分布ベクトルを見つけることができたら, 正再帰的であることがわかる.

定理 6.27 の証明　推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ が既約で正再帰的であるとき, 定理 6.24 より, 定常測度ベクトル ${}_{\{s\}}\boldsymbol{x}$ を正規化すれば定常分布ベクトルが得られ, (i) $\Longrightarrow$ (ii) が成り立つ. よって, 以下では, 定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ の存在を仮定し, (ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す.

定常分布は定常測度でもあるので, 定理 6.26 より, 既約な推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ は再帰的であり, 定常測度は定数倍の自由度を残し, 一意に定まる. したがって, $\boldsymbol{\pi} = c \cdot {}_{\{s\}}\boldsymbol{x}$ を満たす定数 $c \in (0, \infty)$ が存在する. よって, 式(172) と $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{e} = 1$ から,

$$\sum_{i \in \mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_i = \mathsf{E}[\tau_s \mid X_0 = s] = 1/c \in (0, \infty),$$

を得る. よって, $\boldsymbol{P}$ は正再帰的である. □

6.21 定常分布の構成例

次のような確率行列を考える.

$$
\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}
\overline{b}_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\
\overline{b}_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots \\
\overline{b}_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots \\
\overline{b}_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}. \tag{180}
$$

ただし, $\{b_k > 0; k \in \mathbb{Z}_+\}$ を離散型確率分布とし, $\overline{b}(k) = \sum_{\ell=k}^{\infty} b_\ell$ と定義する. なお, $\boldsymbol{P}$ は既約かつ非周期的となることに注意する.

ここで, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ を $\boldsymbol{P}$ の定常分布とすると, 平衡方程式 $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$ から次式を得る.

$$
\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \overline{b}_{i+1}, \tag{181}
$$

$$
\pi_k = \sum_{i=k-1}^{\infty} \pi_i b_{i-k+1}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{182}
$$

上の平衡方程式の解を以下のように予想してみる.

$$\pi_k = (1-\gamma)\gamma^k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{183}$$

ただし, $0 < \gamma < 1$ とする.

まず, 式(183) を式(181) に代入すると, 以下のようになる.

$$\begin{aligned}
1-\gamma &= (1-\gamma)\sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i \overline{b}_{i+1} \\
\Longleftrightarrow 1 &= \sum_{i=0}^{\infty}\gamma^i \sum_{j=i+1}^{\infty} b_j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=0}^{j-1}\gamma^i \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} b_j \frac{1-\gamma^j}{1-\gamma} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \frac{1-\gamma^j}{1-\gamma} = \frac{1-\widehat{b}(\gamma)}{1-\gamma} \\
\Longleftrightarrow \gamma &= \widehat{b}(\gamma) \qquad\qquad (\text{ただし}, \widehat{b}(z) = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} z^j b_j)
\end{aligned}$$

同様に, 式(183) を式(182) に代入すると,

$$(1-\gamma)\gamma^k = (1-\gamma)\sum_{i=k-1}^{\infty}\gamma^i b_{i-k+1},$$

となり, これを変形して,

$$\gamma = \sum_{i=k-1}^{\infty} \gamma^{i-k+1} b_{i-k+1} = \widehat{b}(\gamma)$$

を得る. よって, 式(183) で定められる $\boldsymbol{\pi}$ が平衡方程式 $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$ を満たすためには, 次式を満たす γ が存在すれば良い.

$$\gamma = \widehat{b}(\gamma), \qquad 0 < \gamma < 1. \tag{184}$$

ここで, $\widehat{b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k b_k$ より,

$$\widehat{b}'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} b_k > 0, \qquad \widehat{b}''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} b_k > 0,$$

$$\widehat{b}(0) = b_0 > 0, \qquad \widehat{b}(1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = 1, \quad \widehat{b}'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k > 0,$$

となるので,方程式(184) の解 γ が存在するための必要十分条件は

$$\widehat{b}'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k > 1, \tag{185}$$

となる.

6.22 有限なマルコフ連鎖の定常分布

定理 6.28 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ をもつマルコフ連鎖の状態部分集合 $\mathbb{C}$ が有限な閉連結クラスであるとき, $\mathbb{C}$ は正再帰的である.

証明　まず, $\mathbb{C}$ が過渡的だと仮定する. 系 6.18 より,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = 0, \quad \forall (i,j) \in \mathbb{C}^2,$$

が成り立つ. これと, $\mathbb{C}$ が有限集合であることから, 次式が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n \in \mathbb{C} \mid X_0 = i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{C}} P_{i,j}^{(n)} = 0, \quad i \in \mathbb{C}. \tag{186}$$

一方で, $\mathbb{C}$ は閉じているので, $\mathsf{P}(X_n \in \mathbb{C} \mid X_0 = i) = 1$ ($\forall i \in \mathbb{C}$) となるが, これは式(186) と矛盾する. よって, $\mathbb{C}$ は再帰的である.

次に, $\mathbb{C}$ が零再帰的にはならないことを示す. $\mathbb{C}$ は閉連結クラスであるので, $\mathbb{C}$ に限定されたマルコフ連鎖 $\{X_{\mathbb{C},n}; n \in \mathbb{Z}_+\}$ を定義することができ (推移確率行列は $\boldsymbol{P}_{\mathbb{C}} := (P_{i,j})_{i,j\in\mathbb{C}}$), 既約かつ再帰的である.

したがって, 定理 6.25 より, マルコフ連鎖 $\{X_{\mathbb{C},n}\}$ は定数倍の自由度を残し, 唯一の定常測度ベクトルをもつ.

さらに, $\mathbb{C}$ が有限であることから, その定常測度ベクトルの総和は有限である. よって, マルコフ連鎖 $\{X_{\mathbb{C},n}\}$ は定常分布ベクトルをもち, 定理 6.27 より, 正再帰的となる. □

定理 6.28 と 6.27 から, 直ちに次の結果が得られる.

系 **6.29** 有限の状態空間をもつ既約な離散時間マルコフ連鎖は正再帰的であり, 唯一の定常分布ベクトルをもつ. また, その定常分布ベクトルのすべての成分は正となる.

有限状態マルコフ連鎖では, 既約性が確認できると直ちに定常分布ベクトルの存在が言える.

6.23 定常分布の確率的意味

補題 6.30 状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$が既約かつ再帰的であるとする. 任意に選ばれた$s \in \mathbb{S}$に対して, N_m ($m \in \mathbb{N}$) を,

$$N_m = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}(X_k = s), \tag{187}$$

と定義する. さらに, 関数$f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$が,

$$\sum_{i \in \mathbb{S}} |f(i)| {}_{\{s\}}x_i < \infty,$$

を満たすとする. ただし, ベクトル${}_{\{s\}}\boldsymbol{x} = \left({}_{\{s\}}x_i\right)_{i \in \mathbb{S}}$は式(164)で与えられる. このとき, 次式が成り立つ.

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{N_m} \sum_{k=1}^{m} f(X_k) = \sum_{i \in \mathbb{S}} f(i) {}_{\{s\}}x_i, \quad a.s. \tag{188}$$

補題 6.30 の証明　まず, $f \ge 0$ を仮定し, 本補題を示す. 状態 s への再帰時刻列を $T_1 = \tau_s, T_2, T_3, \dots$ とし, U_ℓ ($\ell \in \mathbb{N}$) を

$$U_\ell = \sum_{n=T_\ell+1}^{T_{\ell+1}} f(X_n), \tag{189}$$

と定義する. 定理 6.16 より, 状態 s の再帰時間列 $\{U_\ell; \ell \in \mathbb{N}\}$ は独立同一に分布する. さらに, 強マルコフ性および斉時性, ならびに $X_{T_1} = s$ を用いると,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[U_1] &= \mathsf{E}\left[\sum_{n=T_1+1}^{T_2} f(X_n)\right] = \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{T_1} f(X_n)\right] \\
&= \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{T_1}\sum_{i\in\mathbb{S}} f(i)\mathbb{1}(X_n = i)\right] \\
&= \sum_{i\in\mathbb{S}} f(i)\mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{T_1} \mathbb{1}(X_n = i)\right] \\
&= \sum_{i\in\mathbb{S}} f(i)\,{}_{\{s\}}x_i < \infty,
\end{aligned}$$

となる. なお, 最後の等号は式 (164) により, 最後の不等号は補題の仮定による.

したがって, 大数の強法則より,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m}U_\ell = \mathsf{E}[U_1] = \sum_{i\in\mathbb{S}} f(i)_{\{s\}}x_i. \tag{190}$$

ところで, マルコフ連鎖$\{X_n\}$は既約かつ再帰的であるから, 状態sへの再帰間隔$T_{\ell+1}-T_\ell$ ($\ell\in\mathbb{N}$) は確率1で有限である. この事実と式(187)から,

$$\lim_{m\to\infty}N_m = \lim_{m\to\infty}\sup\{\ell\in\mathbb{N} : T_\ell\le m\} = \infty,$$

となる. また, $\mathsf{P}_i(T_1=\tau_s<\infty)=1$ ($\forall i\in\mathbb{S}$) となるので (定理 6.15参照),

$$\mathsf{P}\left(\sum_{n=1}^{T_1} f(X_n)<\infty\right) = 1.$$

よって,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{N_m}\sum_{n=1}^{T_1} f(X_n) = 0, \qquad a.s.$$

が成り立つので, これと式(189), (190) と合わせて, 次式を得る.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{N_m}\sum_{n=1}^{T_{N_m}} f(X_n)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{N_m}\sum_{n=T_1+1}^{T_{N_m}} f(X_n) = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{N_m}\sum_{\ell=0}^{N_m-1} U_\ell$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{N_m-1}{N_m}\frac{1}{N_m-1}\sum_{\ell=0}^{N_m-1} U_\ell = \sum_{i\in\mathbb{S}} f(i)\,{}_{\{s\}}x_i, \quad a.s. \tag{191}$$

同様にして,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{N_m}\sum_{n=1}^{T_{N_m+1}} f(X_n) = \sum_{i\in\mathbb{S}} f(i)\,{}_{\{s\}}x_i, \qquad a.s. \tag{192}$$

さて, 式(187)から, $T_{N_m} \le m < T_{N_m+1}$ となって, 次の不等式が成り立つ.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{N_m}\sum_{n=1}^{T_{N_m}} f(X_n) \le \lim_{m\to\infty}\frac{1}{N_m}\sum_{n=1}^{m} f(X_n)$$

$$< \lim_{m\to\infty}\frac{1}{N_m}\sum_{n=1}^{T_{N_m+1}} f(X_n).$$

これに式(191), (192)を適用すると, 式(188)が得られる. 以上の議論により, $f \geq 0$の仮定のもとで, 本補題の主張が示された. 関数fが非負ではない場合については, 2つの非負関数$f^{+} = \max(f, 0)$, $f^{-} = -\min(f, 0)$を用いて,

$$f(i) = f^{+}(i) - f^{-}(i), \qquad i \in \mathbb{S},$$

と表現し, $f \geq 0$の仮定の下で示した結果を適用すれば, 式(188)が得られる. □

定理 6.31 (エルゴード定理) 状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$が既約かつ正再帰的であるとし, その定常分布ベクトルを$\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{i \in \mathbb{S}}$とする. さらに, 関数$f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$が,

$$\sum_{i \in \mathbb{S}} |f(i)| \pi_i < \infty,$$

を満たすとする. このとき, 次式が成り立つ.

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(X_k) = \sum_{i \in \mathbb{S}} f(i) \pi_i, \quad a.s. \tag{193}$$

証明　補題 6.30 の証明と同様に, 状態 s への再帰時刻列を $T_1 = \tau_s, T_2, T_3, \ldots$ とし, V_ℓ ($\ell \in \mathbb{N}$) を

$$V_\ell = \sum_{n=T_\ell+1}^{T_{\ell+1}} \mathbb{1}(X_n = s),$$

と定義する. 確率変数列 $\{V_\ell; \ell \in \mathbb{N}\}$ は独立同一に分布し,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[V_1] &= \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=T_1+1}^{T_2} \mathbb{1}(X_n = s)\right] \\
&= \mathsf{E}_s\left[\sum_{n=1}^{T_1} \mathbb{1}(X_n = s)\right] = \mathsf{E}_s[T_1] = \mathsf{E}_s[\tau_s] \\
&= \sum_{i\in\mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_i.
\end{aligned}$$

最後の等号は式(172)による. よって, 大数の強法則より,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m} V_\ell = \sum_{j\in\mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_j,$$

を得るので, これを用いて, 補題 6.30 の証明をなぞれば,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{N_m}{m} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\mathbb{1}(X_n = s) = \sum_{j\in\mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_j, \tag{194}$$

を示すことができる. したがって, 式(194) と補題 6.30 から,

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}f(X_k) &= \lim_{m\to\infty}\frac{m}{N_m}\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}f(X_k)\\ &= \frac{\sum_{i\in\mathbb{S}}f(i)\,{}_{\{s\}}x_i}{\sum_{j\in\mathbb{S}}{}_{\{s\}}x_j} = \sum_{i\in\mathbb{S}}f(i)\pi_i,\end{aligned}$$

となり, 題意は示される. □

系 6.32 定理 6.31 と同じ条件の下で, 次式が成り立つ.

$$\pi_i = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\mathbb{1}(X_n = i), \quad a.s.$$

つまり, π_i は状態 i への訪問回数の時間割合に等しい.

証明　定理 6.31 において, $f(x) = \mathbb{1}(x = i)$ ($x \in \mathbb{S}$) とおけば良い. □

6.24 マルコフ連鎖の安定条件 (Fosterの定理)

定理 6.33 (Fosterの定理) 加算状態空間$\mathbb{S}$上の既約なマルコフ連鎖 $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ に対し, $\mathbb{S}$上の関数v, 有限集合$\mathbb{C} \subset \mathbb{S}$, $\varepsilon > 0$ が存在して,

(i) $\inf_{i\in\mathbb{S}} v(i) > -\infty$

(ii) $\mathsf{E}_i[v(X_1)] < \infty$, $\forall i \in \mathbb{C}$

(iii) $\mathsf{E}_i[v(X_1)] - v(i) \le -\varepsilon$, $\forall i \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{C}$

が成り立つならば, マルコフ連鎖$\{X_n\}$は正再帰的である.

- vは, 各状態と実数値を対応させるリヤプノフ(Lyapunov)関数である.
- 条件 (iii) は,

$$\mathsf{E}_i[v(X_1) - v(X_0)] < -\varepsilon,$$

と書き換えることができ, これは有限個の例外($\mathbb{C}$に含まれる状態)を除いて, $v(X_n)$の1推移当たりの平均増加量が負であることを意味する.

注意 **6.8** $\mathbf{1}_{\mathbb{C}} := (1_{\mathbb{C}}(i))_{i\in\mathbb{S}}$ を

$$1_{\mathbb{C}}(i) = \begin{cases} 1, & i \in \mathbb{C}, \\ 0, & i \in \mathbb{S}\setminus\mathbb{C}, \end{cases}$$

を満たす列ベクトルとする. これと, 列ベクトル $\boldsymbol{v} = (v(i))_{i\in\mathbb{S}}$ を用いると, 条件 (i)–(iii) は次のように書くことができる.

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} \le \boldsymbol{v} - \varepsilon\boldsymbol{e} + b\mathbf{1}_{\mathbb{C}}. \tag{195}$$

ただし, $b = \max_{i\in\mathbb{C}}\{\mathsf{E}_i[v(X_1)] - v(i)\}$ とする.

Fosterの定理(定理6.33)を証明するにあたり, まず次の補題を示す.

補題 6.34 $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ を状態空間$\mathbb{S}$上の既約なマルコフ連鎖とする. また, 状態空間$\mathbb{S}$の有限部分集合$\mathbb{C}$に対して, $\tau_{\mathbb{C}} = \inf\{n \in \mathbb{N}; X_n \in \mathbb{C}\}$ とおく. このとき,

$$\mathsf{E}_j[\tau_{\mathbb{C}}] < \infty, \qquad \forall j \in \mathbb{C},$$

が成り立つならば, マルコフ連鎖 $\{X_n\}$ は正再帰的である.

証明　任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $\tau_{\mathbb{C}}(m)$ を m 回目に $\mathbb{C}$ を訪問する時刻とし, さらに,

$$\Delta\tau_{\mathbb{C}}(m) = \tau_{\mathbb{C}}(m) - \tau_{\mathbb{C}}(m-1),$$

とおく. ただし, $\tau_{\mathbb{C}}(0) = 0$ とする. 定義より, $\tau_{\mathbb{C}}(m)$ はマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ に対する停止時刻であり, $\Delta\tau_{\mathbb{C}}(1) = \tau_{\mathbb{C}}$ となる.

ここで,

$$Y_0 = X_0 = i \in \mathbb{C},$$

$$Y_m = X_{\tau_{\mathbb{C}}(m)}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

とおくと, 強マルコフ性により, $\{Y_m; m \in \mathbb{Z}_+\}$ は状態空間 $\mathbb{C}$ をもつマルコフ連鎖となる. 元のマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ が既約であるので, $\{Y_m; m \in \mathbb{Z}_+\}$ も既約となり, さらに, 状態空間 $\mathbb{C}$ が有限であることから, 正再帰的である (定理 6.28 参照). よって, $\sigma_i = \inf\{m \in \mathbb{N} : Y_m = i\}$ とすると, 次式が成り立つ.

$$\mathsf{E}[\sigma_i \mid Y_0 = i] < \infty. \tag{196}$$

ところで, σ_i を用いると, 元のマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ における状態 i への初到達時刻 τ_i は次のように表現することができる.

$$\tau_i = \sum_{m=1}^{\sigma_i} \Delta\tau_{\mathbb{C}}(m) = \sum_{m=1}^{\infty} \Delta\tau_{\mathbb{C}}(m)\mathbb{1}(m \le \sigma_i).$$

したがって,

$$\mathsf{E}_i[\tau_i] = \mathsf{E}_i\left[\sum_{m=1}^{\infty} \Delta\tau_{\mathbb{C}}(m)\mathbb{1}(m \le \sigma_i)\right],$$

となる. さらに, 時刻 $\tau_{\mathbb{C}}(m-1)$ でのマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ の状態で場合分けを行うと, 次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_i[\tau_i] &= \mathsf{E}_i\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\ell\in\mathbb{C}} \Delta\tau_{\mathbb{C}}(m)\mathbb{1}(m \le \sigma_i, X_{\tau_{\mathbb{C}}(m-1)} = \ell)\right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\ell\in\mathbb{C}} \mathsf{E}_i\left[\Delta\tau_{\mathbb{C}}(m)\mathbb{1}(m \le \sigma_i, X_{\tau_{\mathbb{C}}(m-1)} = \ell)\right]. \qquad (197)\end{aligned}$$

確率変数 $\tau_{\mathbb{C}}(m)$ がマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ の停止時刻であることと, $\{X_n\}$ の強マルコフ性を用いて, 式(197)の右辺の期待値は次のように書き換えることができる.

$$\mathsf{E}_i\left[\Delta\tau_{\mathbb{C}}(m)\mathbb{1}(m \le \sigma_i, X_{\tau_{\mathbb{C}}(m-1)} = \ell)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathsf{E}_i\left[\Delta\tau_{\mathbb{C}}(m) \mid m \le \sigma_i, X_{\tau_{\mathbb{C}}(m-1)} = \ell\right] \\
&\qquad \times \mathsf{P}_i(m \le \sigma_i, X_{\tau_{\mathbb{C}}(m-1)} = \ell) \\
&= \mathsf{E}\left[\Delta\tau_{\mathbb{C}}(1) \mid X_{\tau_{\mathbb{C}}(0)} = \ell\right] \qquad \text{(強マルコフ性と斉時性より)} \\
&\qquad \times \mathsf{P}_i(m \le \sigma_i, X_{\tau_{\mathbb{C}}(m-1)} = \ell) \\
&= \mathsf{E}\left[\tau_{\mathbb{C}} \mid X_0 = \ell\right] \qquad (\Delta\tau_{\mathbb{C}}(1) = \tau_{\mathbb{C}},\ \Delta\tau_{\mathbb{C}}(0) = 0 \text{ より}) \\
&\qquad \times \mathsf{P}_i(m \le \sigma_i, X_{\tau_{\mathbb{C}}(m-1)} = \ell) \\
&\le \sup_{j\in\mathbb{C}} \mathsf{E}_j\left[\tau_{\mathbb{C}}\right] \times \mathsf{P}_i(m \le \sigma_i, X_{\tau_{\mathbb{C}}(m-1)} = \ell).
\end{aligned} \tag{198}
$$

ここで, 集合 $\mathbb{C}$ が有限であることに注意すると, $\mathsf{E}_j[\tau_{\mathbb{C}}] < \infty$ (補題の仮定) から,

$$
\sup_{j\in\mathbb{C}} \mathsf{E}_j\left[\tau_{\mathbb{C}}\right] < \infty, \tag{199}
$$

となる.

さて, 式(198)を式(197)の右辺に代入すると,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{E}_i[\tau_i] &\le \sup_{j\in\mathbb{C}} \mathsf{E}_j[\tau_{\mathbb{C}}] \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\ell\in\mathbb{C}} \mathsf{P}_i(m \le \sigma_i, X_{\tau_{\mathbb{C}}(m-1)} = \ell) \\
&= \sup_{j\in\mathbb{C}} \mathsf{E}_j[\tau_{\mathbb{C}}] \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}_i(m \le \sigma_i) \\
&= \sup_{j\in\mathbb{C}} \mathsf{E}_j[\tau_{\mathbb{C}}] \cdot \mathsf{E}_i[\sigma_i] < \infty,
\end{aligned}
$$

が得られる. なお, 最後の不等号は式(199)による. 以上の議論により, マルコフ連鎖 $\{X_n\}$ は正再帰的である. □

つづいて, 補題 6.34 を用いて, 定理6.33を証明する.

定理6.33の証明　条件(i)-(iii)の $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{e}$ (c は任意の実数)と置き換えても, 本質的に変わりはない. そこで, 以下では, $\boldsymbol{v} = (v(i))_{i\in\mathbb{S}} \ge \varepsilon\boldsymbol{e}$ とする.

補題 6.34 と同じく, $\tau_{\mathbb{C}}$ を $\mathbb{C}$ への初到達時刻とし,

$$
Z_n = v(X_n)\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}}), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,
$$

とおく. また, 表記を簡単にするため,

$$\mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[\cdot] = \mathsf{E}[\cdot \mid X_0 =\notin \mathbb{C}], \qquad X_1^n = (X_1, \ldots, X_n)$$

と書くことする. このとき,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[Z_{n+1} \mid X_1^n] \\
&\quad = \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[Z_{n+1}\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}}) \mid X_1^n] + \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[Z_{n+1}\mathbb{1}(n \geq \tau_{\mathbb{C}}) \mid X_1^n] \\
&\quad = \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[{\color{red}v(X_{n+1})\mathbb{1}(n+1 < \tau_{\mathbb{C}})}\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}}) \mid X_1^n] \\
&\qquad + \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[{\color{red}v(X_{n+1})\mathbb{1}(n+1 < \tau_{\mathbb{C}})}\mathbb{1}(n \geq \tau_{\mathbb{C}}) \mid X_1^n] \quad \text{(この項はゼロ)} \\
&\quad = \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[v(X_{n+1})\mathbb{1}(n+1 < \tau_{\mathbb{C}})\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}}) \mid X_1^n] \\
&\quad \leq \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[v(X_{n+1})\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}}) \mid X_1^n].
\end{aligned} \tag{200}$$

ここで, $\tau_{\mathbb{C}}$ はマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ に対する停止時刻であったので, $X_0 = i \notin \mathbb{C}$ と $X_1^n = (X_1, \ldots, X_n)$ が与えられたとき, $\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})$ の値は確定する. この事実とマルコフ性から, 次式を得る.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[v(X_{n+1})\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}}) \mid X_1^n] &= \mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})\mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[v(X_{n+1}) \mid X_1^n] \\
&= \mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})\mathsf{E}[v(X_{n+1}) \mid X_n].
\end{aligned} \tag{201}$$

つづいて, 式(201)の右辺を評価する. $\tau_{\mathbb{C}}$の定義より, $X_n \in \mathbb{C}$のとき, $\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}}) = 0$であるので,

$$\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})\mathsf{E}[v(X_{n+1}) \mid X_n \in \mathbb{C}] = 0. \tag{202}$$

一方, $X_n \notin \mathbb{C}$の場合には, 条件(iii)と斉時性から, 次式を得る.

$$\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})\mathsf{E}[v(X_{n+1}) \mid X_n \notin \mathbb{C}] \le \mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})(v(X_n) - \varepsilon). \tag{203}$$

なお, $\boldsymbol{v} \ge \varepsilon \boldsymbol{e}$より, 式(203)の右辺は非負である. したがって, 式(202)と(203)をあわせると,

$$\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})\mathsf{E}[v(X_{n+1}) \mid X_n] \le \mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})(v(X_n) - \varepsilon),$$

となって, これを式(201)の右辺に適用すると, 次のようになる.

$$\mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[v(X_{n+1})\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}}) \mid X_1^n] \le \mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})(v(X_n) - \varepsilon). \tag{204}$$

さらに, 式(204)を(200)の右辺に代入し, $Z_n = v(X_n)\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})$を用いると,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[Z_{n+1} \mid X_1^n] &\le \mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}})(v(X_n) - \varepsilon) \\ &= Z_n - \varepsilon\mathbb{1}(n < \tau_{\mathbb{C}}),\end{aligned} \tag{205}$$

が得られ, これから次式が導かれる.

$$0 \le \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[Z_{n+1}] \le \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[Z_n] - \varepsilon\mathsf{P}_{i\notin\mathbb{C}}(\tau_{\mathbb{C}} > n).$$

また, 上の不等式を繰り返し用いると, 任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$0 \le \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[Z_0] - \varepsilon \sum_{\ell=0}^{n+1} \mathsf{P}_{i\notin\mathbb{C}}(\tau_{\mathbb{C}} > \ell)$$

$$= v(i) - \varepsilon \sum_{\ell=0}^{n+1} \mathsf{P}_{i\notin\mathbb{C}}(\tau_{\mathbb{C}} > \ell),$$

となるので, $n \to \infty$ とすることで,

$$0 \le v(i) - \varepsilon \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[\tau_{\mathbb{C}}],$$

を得る. したがって, 次の不等式が成立する.

$$\mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[\tau_{\mathbb{C}}] \le \varepsilon^{-1} v(i). \tag{206}$$

以下では, 式(206) を用いて, $\mathsf{E}_j[\tau_{\mathbb{C}}] < \infty$ ($\forall j \in \mathbb{C}$) を示す. まず, $\mathsf{E}_j[\tau_{\mathbb{C}}]$ に対して, X_1 の値で場合分けを行う.

$$\mathsf{E}_j[\tau_{\mathbb{C}}] = 1 + \sum_{i\notin\mathbb{C}} P_{j,i} \mathsf{E}[\tau_{\mathbb{C}}^+ \mid X_1 = i \notin \mathbb{C}]. \tag{207}$$

ただし, $\tau_{\mathbb{C}}^+ = \inf\{n \ge 2; X_n \in \mathbb{C}\}$ である. $\{X_n\}$ の斉時性と式(206) より,

$$\mathsf{E}[\tau_{\mathbb{C}}^+ \mid X_1 = i \notin \mathbb{C}] = \mathsf{E}_{i\notin\mathbb{C}}[\tau_{\mathbb{C}}] \le \varepsilon^{-1} v(i).$$

これを式(207)に代入し, 次式が得られる.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_j[\tau_{\mathbb{C}}] &\le 1+\varepsilon^{-1}\sum_{i\notin\mathbb{C}} P_{j,i}v(i) \\ &\le 1+\varepsilon^{-1}\sum_{i\in\mathbb{S}} P_{j,i}v(i) = 1+\varepsilon^{-1}\mathsf{E}_j[v(X_1)] \\ &\le 1+\varepsilon^{-1}\{v(j)-\varepsilon\} = v(j) < \infty.\end{aligned}$$

なお, 3つめの不等号は条件(ii)による. よって, 補題6.34から, マルコフ連鎖$\{X_n\}$は正再帰的となる. □

6.25　マルコフ連鎖の不安定条件

命題 **6.35**　加算状態空間$\mathbb{S}$上の既約なマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$に対して, vを次式を満たすような$\mathbb{S}$上の関数とする.

$$\sup_{i \in \mathbb{S}} \mathsf{E}_i[(v(X_1) - v(X_0))^+] < \infty.$$

このとき, 以下の(i), (ii), (iii)のいずれか一つが満たされるとき, マルコフ連鎖$\{X_n\}$は正再帰的ではない.

(i) vは一定値関数ではなく, $\mathsf{E}_i[v(X_1)] - v(i) \ge 0$ ($\forall i \in \mathbb{S}$).

(ii) $\mathsf{E}_i[v(X_1)] - v(i) \ge 0$ ($\forall i \in \mathbb{C}$)かつ
$\mathsf{E}_i[v(X_1)] - v(i) > 0$ ($\exists i \in \mathbb{C}$)

(iii) 次を満たすような空ではない集合$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{S}$が存在する.

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}_i[v(X_1)] - v(i) \ge 0, && \forall i \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{C}, \\ &v(i) > \sup\{v(j); j \in \mathbb{C}\}, && \exists i \in \mathbb{S} \setminus \mathbb{C}. \end{aligned}$$

6.26 安定条件の応用

- $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ が満たす再帰式

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + A_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

- $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ は独立かつ同一に分布 $\Longrightarrow \{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ はマルコフ連鎖
- $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ の推移確率行列を $\boldsymbol{P}$ とすると,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{208}$$

- $a_k = \mathsf{P}(A_n = k) > 0\ (k \in \mathbb{Z}_+) \Longrightarrow \boldsymbol{P}$ は既約かつ非周期

Fosterの定理を用いて, $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k < 1$ のとき, 式(208)の推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ をもつマルコフ連鎖 $\{X_n\}$ が正再帰的であることを示す.

関数 v を, $v(i) = i$ ($i \in \mathbb{Z}_+$) とおくと, $\inf_{i \in \mathbb{Z}_+} v(i) = 0 > -\infty$ より, 明らかに条件 (i) を満たす. また,

$$\mathsf{E}_0[v(X_1)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}_0(X_1 = k) v(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k = \rho < 1.$$

さらに, 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_i[v(X_1)] - v(i) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}_i(X_1 = k) v(k) - v(i) \\
&\quad = \sum_{k=i-1}^{\infty} k a_{k-i+1} - i = \sum_{k=0}^{\infty} (k + i - 1) a_k - i = \rho - 1 < 0.
\end{aligned}$$

となって, Foster の定理の条件がすべて成立するので, $\boldsymbol{P}$ は正再帰的である.

6.27 不安定条件の応用

命題6.35を用いて, $\rho \geq 1$のとき, $\{X_n\}$が正再帰的ではないことを示す. 関数vを, $v(i) = i$ ($i \in \mathbb{Z}_+$)と定め, 安定性の確認のときと同様の計算を行う.

$$\mathsf{E}_0[(v(X_1) - v(X_0))^+] = \mathsf{E}_0[v(X_1)] = \rho < \infty,$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_{i\in\mathbb{N}}[(v(X_1) - v(X_0))^+] \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}_{i\in\mathbb{N}}(X_1 = k)\max(k-i, 0) = \sum_{k=i+1}^{\infty} (k-i)a_{k-i+1} \\
&\quad \leq \sum_{k=1}^{\infty} k a_k = \rho < \infty.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}_+} \mathsf{E}_i[(v(X_1) - v(X_0))^+] \leq \rho < \infty$$

$$\mathsf{E}_0[v(X_1)] = \rho \geq 1,$$

$$\mathsf{E}_i[v(X_1)] - v(i) = \rho - 1 \geq 0, \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

となり, 命題6.35の条件(i)が成立するので, $\boldsymbol{P}$は正再帰的ではない

6.28 カップリング法

6.28.1 全変動距離

カップリングの議論に必要な全変動距離を導入する.

定義 6.14 (全変動距離) 可算集合$\mathbb{S}$に含まれる値をとる2つの確率変数X, Yに対して,

$$d_{\mathrm{V}}(X,Y)=\sum_{i\in\mathbb{S}}|\mathsf{P}(X=i)-\mathsf{P}(Y=i)|$$

と定義される$d_{\mathrm{V}}(X,Y)$を, 確率変数XとYに関する全変動距離とよぶ.

補題 6.36 可算集合$\mathbb{S}$に含まれる値を取る確率変数X, Yに対して,

$$\begin{aligned}&\sup_{\mathbb{A}\subseteq\mathbb{S}}|\mathsf{P}(X\in\mathbb{A})-\mathsf{P}(Y\in\mathbb{A})|\\&\quad=\sup_{\mathbb{A}\subseteq\mathbb{S}}\{\mathsf{P}(X\in\mathbb{A})-\mathsf{P}(Y\in\mathbb{A})\}=\frac{1}{2}d_{\mathrm{V}}(X,Y).\end{aligned}\tag{209}$$

証明　任意の$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{S}$に対して, $\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{S} \setminus \mathbb{A}$とおくと,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(Y \in \mathbb{A}) - \mathsf{P}(X \in \mathbb{A}) &= \{1 - \mathsf{P}(X \in \mathbb{A})\} - \{1 - \mathsf{P}(Y \in \mathbb{A})\} \\
&= \mathsf{P}(X \in \overline{\mathbb{A}}) - \mathsf{P}(Y \in \overline{\mathbb{A}}),
\end{aligned}
$$

となる. これと$\overline{\mathbb{A}} \subseteq \mathbb{S}$から, 式(209)の最初の等号が成立する.

次に, 式(209)の2つ目の等号を示す. まず,

$$
\mathbb{A}^* = \{i \in \mathbb{S}; \mathsf{P}(X = i) - \mathsf{P}(Y = i) > 0\},
$$

とおくと, 次式を得る.

$$
\sup_{\mathbb{A} \subseteq \mathbb{S}} \{\mathsf{P}(X \in \mathbb{A}) - \mathsf{P}(Y \in \mathbb{A})\} = \sum_{i \in \mathbb{A}^*} \{\mathsf{P}(X = i) - \mathsf{P}(Y = i)\}. \tag{210}
$$

ここで, $\sum_{i \in \mathbb{S}} \{\mathsf{P}(X = i) - \mathsf{P}(Y = i)\} = 0$が成り立つことに注意すると,

$$
\sum_{i \in \mathbb{A}^*} \{\mathsf{P}(X = i) - \mathsf{P}(Y = i)\} = - \sum_{i \in \overline{\mathbb{A}^*}} \{\mathsf{P}(X = i) - \mathsf{P}(Y = i)\}. \tag{211}
$$

さらに, $\mathbb{A}^*$の定義から,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(X = i) - \mathsf{P}(Y = i) &> 0, \qquad \forall i \in \mathbb{A}^*, \\
\mathsf{P}(X = i) - \mathsf{P}(Y = i) &\le 0, \qquad \forall i \in \overline{\mathbb{A}^*},
\end{aligned}
$$

であるので, 式(211)より次式が導かれる.

$$\sum_{i\in\mathbb{A}^*}\{\mathsf{P}(X=i)-\mathsf{P}(Y=i)\} = \sum_{i\in\mathbb{A}^*}|\mathsf{P}(X=i)-\mathsf{P}(Y=i)|$$
$$= \sum_{i\in\overline{\mathbb{A}^*}}|\mathsf{P}(X=i)-\mathsf{P}(Y=i)|.$$

したがって,

$$\sum_{i\in\mathbb{A}^*}\{\mathsf{P}(X=i)-\mathsf{P}(Y=i)\} = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{S}}|\mathsf{P}(X=i)-\mathsf{P}(Y=i)|$$
$$= \frac{1}{2}d_{\mathrm{V}}(X,Y),$$

を得る. これを式(210)に代入すれば,

$$\sup_{\mathbb{A}\subseteq\mathbb{S}}\{\mathsf{P}(X\in\mathbb{A})-\mathsf{P}(Y\in\mathbb{A})\} = \frac{1}{2}d_{\mathrm{V}}(X,Y),$$

となり, 証明は完了する. □

6.28.2 カップリング

共通の確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$上に定義され, 同じ推移確率行列$\boldsymbol{P}$および状態空間$\mathbb{S}$をもつ2つのマルコフ連鎖$\{X_n'; n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{X_n''; n \in \mathbb{Z}_+\}$を考える.

定義 6.15 マルコフ連鎖$\{X_n'; n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{X_n''; n \in \mathbb{Z}_+\}$が**カップリングされている**とは, 確率1で有限な確率変数τに対して,

$$X_n' = X_n'', \qquad \forall n \geq \tau,$$

であるときにいう. また, このとき, τを**カップリング時刻**とよぶ.

補題 6.36を用いると, 次の結果を得る.

定理 6.37 マルコフ連鎖$\{X_n'\}$, $\{X_n''\}$とカップリング時刻τに対して, 次式が成り立つ.

$$d_V(X_n', X_n'') \leq 2\mathrm{P}(\tau > n), \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{212}$$

証明　カップリング時刻の定義より,

$$\mathsf{P}(X'_n \in \mathbb{A}, \tau \leq n) = \mathsf{P}(X''_n \in \mathbb{A}, \tau \leq n), \qquad \forall \mathbb{A} \subseteq \mathbb{S},$$

が成り立つ. よって, 任意の $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{S}$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X'_n \in \mathbb{A}) - \mathsf{P}(X''_n \in \mathbb{A}) &= \mathsf{P}(X'_n \in \mathbb{A}, \tau > n) + \mathsf{P}(X'_n \in \mathbb{A}, \tau \leq n) \\ &\quad - \mathsf{P}(X''_n \in \mathbb{A}, \tau > n) - \mathsf{P}(X''_n \in \mathbb{A}, \tau \leq n) \\ &= \mathsf{P}(X'_n \in \mathbb{A}, \tau > n) - \mathsf{P}(X''_n \in \mathbb{A}, \tau > n) \\ &\leq \mathsf{P}(X'_n \in \mathbb{A}, \tau > n) \\ &\leq \mathsf{P}(\tau > n),\end{aligned}$$

となって,

$$\sup_{\mathbb{A} \subseteq \mathbb{S}} \{\mathsf{P}(X'_n \in \mathbb{A}) - \mathsf{P}(X''_n \in \mathbb{A})\} \leq \mathsf{P}(\tau > n),$$

が導かれる. この不等式と補題 6.36 から,

$$\frac{1}{2} d_V(X'_n, X''_n) \leq \mathsf{P}(\tau > n),$$

が得られ, 式 (212) が成り立つ. □

6.28.3　独立カップリング

定理 6.38 離散時間確率過程 $\{X_n^{(1)}; n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{X_n^{(2)}; n \in \mathbb{Z}_+\}$ を, 同じ推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ と状態空間 $\mathbb{S}$ をもち, 同一の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ 上に定義された独立なマルコフ連鎖とする. 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ は非周期的かつ既約で再帰的であるとし, $\tau = \inf\{n \in \mathbb{Z}_+; X_n^{(1)} = X_n^{(2)}\}$ とおく. このとき, $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$ であり, 次式で定義される確率過程 $\{X_n^*; n \in \mathbb{Z}_+\}$ は推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ と状態空間 $\mathbb{S}$ をもつマルコフ連鎖となる.

$$X_n^* = \begin{cases} X_n^{(1)}, n \le \tau, \\ X_n^{(2)}, n \ge \tau. \end{cases}$$

注意 6.9 定理 6.38 は, $\{X_n^{(1)}; n \ge \tau\}$ と $\{X_n^{(2)}; n \ge \tau\}$ が同じ分布に従うと主張している. つまり, 任意の $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_m \in \mathbb{S}$ に対して,

$$\mathsf{P}(X_{k_1+\tau}^{(1)} = i_1, \dots, X_{k_m+\tau}^{(1)} = i_m) = \mathsf{P}(X_{k_1+\tau}^{(2)} = i_1, \dots, X_{k_m+\tau}^{(2)} = i_m),$$

が成り立つ.

証明　任意の $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $Z_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$ とおくと, $\{Z_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ は状態空間 $\mathbb{S}^2$ 上の2変数マルコフ連鎖となり, その推移確率は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(Z_{n+1} = (\ell, j) \mid Z_n = (k, i)) &= \mathsf{P}(X_{n+1}^{(1)} = \ell \mid, X_n^{(1)} = k) \\ &\quad \times \mathsf{P}(X_{n+1}^{(2)} = j \mid, X_n^{(2)} = i) \\ &= P_{k,\ell} P_{i,j} =: p(k, i; \ell, j). \end{aligned} \tag{213}$$

また, 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ が既約かつ非周期的であるので, 定理 6.1 より, 任意の $(k, \ell), (i, j) \in \mathbb{S}^2$ に対して,

$$\begin{aligned} P_{k,\ell}^{(n)} &> 0 \quad \forall n \geq \exists m_1, \\ P_{i,j}^{(n)} &> 0, \quad \forall n \geq \exists m_2. \end{aligned}$$

となるので, 次式が成り立つ.

$$\mathsf{P}(Z_n = (\ell, j) \mid Z_0 = (k, i)) = P_{k,\ell}^{(n)} P_{i,j}^{(n)} > 0, \quad \forall n \geq m := \max(m_1, m_2).$$

したがって, マルコフ連鎖 $\{Z_n\}$ は既約かつ非周期的である. ここで, $\boldsymbol{P}$ の定常測度ベクトルを $\boldsymbol{x} := (x_i)_{i \in \mathbb{S}}$ とし, さらに, 任意の $(k, i) \in \mathbb{S}^2$ に対して, $\overline{x}(k, i) = x_k x_i$

とおくと,

$$\begin{aligned}\sum_{(k,i)\in\mathbb{S}^2} \overline{x}(k,i)p(k,i;\ell,j) &= \sum_{(k,i)\in\mathbb{S}} x_k x_i P_{k,\ell} P_{i,j} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{S}} x_k P_{k,\ell} \sum_{i\in\mathbb{S}} x_i P_{i,j} \\ &= x_\ell x_j = \overline{x}(\ell,j), \end{aligned} \tag{214}$$

となるので, $\overline{\boldsymbol{x}} := (\overline{x}(k,i))_{(k,i)\in\mathbb{S}}$ はマルコフ連鎖 $\{Z_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ の定常測度ベクトルである. よって, マルコフ連鎖 $\{Z_n\}$ は再帰的となり (定理 6.26 参照), 任意の状態 $(k,i) \in \mathbb{S}^2$ から状態 $(j,j) \in \mathbb{S}^2$ に確率 1 で到達可能である (定理 6.15 参照). つまり, $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$ が成り立つ.

ところで, τ はマルコフ連鎖 $\{Z_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}); n \in \mathbb{Z}_+\}$ に対する停止時刻である. よって, 時刻 τ での状態 $X_\tau^{(1)} = X_\tau^{(2)}$ が与えられたとすると, $\{Z_n; n \ge \tau\}$ は, $\{Z_n; 0 \le n < \tau\}$ とは独立であり, マルコフ連鎖 $\{Z_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ と同じ推移確率行列に支配されるマルコフ連鎖となる (定理 6.12 参照).

定義から, マルコフ連鎖$\{Z_n n \in \mathbb{Z}_+\}$が同一の推移確率行列$\boldsymbol{P}$と状態空間$\mathbb{S}$をもつ独立なマルコフ連鎖$\{X_n^{(1)} n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{X_n^{(2)} n \in \mathbb{Z}_+\}$の直積過程であったので, $X_\tau^{(1)} = X_\tau^{(2)}$が与えられた下では, 次の2つが成り立つ.

(i) $\{X_n^{(2)}; n \ge \tau\}$と$\{X_n^{(1)}; 0 \le n < \tau\}$は独立である.

(ii) $\{X_n^{(2)}; n \ge \tau\}$は推移確率行列$\boldsymbol{P}$と状態空間$\mathbb{S}$をもつマルコフ連鎖となる.

したがって, $\{X_n^{(1)}; n \le \tau\}$と$\{X_n^{(2)}; n \ge \tau\}$をつないで得られる確率過程$\{X_n^{*}; n \in \mathbb{Z}_+\}$は, 推移確率行列$\boldsymbol{P}$と状態空間$\mathbb{S}$をもつマルコフ連鎖となる. $\square$

定理 6.38 を用いて, 次の定理を示すことができる.

定理 6.39 状態空間$\mathbb{S}$上で定義された非周期的かつ既約で再帰的な推移確率行列$\boldsymbol{P}$をもつマルコフ連鎖$\{X_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$を考え, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i\in\mathbb{S}}$および$\boldsymbol{\nu} = (\nu_i)_{i\in\mathbb{S}}$を$\mathbb{S}$上の確率ベクトルとする. このとき, 次式が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{S}} |\mathsf{P}_{\boldsymbol{\mu}}(X_n = i) - \mathsf{P}_{\boldsymbol{\nu}}(X_n = i)| = 0. \tag{215}$$

ただし, 任意の確率ベクトル$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{S}}$に対して,

$$\mathsf{P}_{\boldsymbol{x}}(\,\cdot\,) = \sum_{i\in\mathbb{S}} x_i \mathsf{P}(\,\cdot \mid X_0 = i).$$

証明　まず, マルコフ連鎖$\{X_n^{(1)}; n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{X_n^{(2)}; n \in \mathbb{Z}_+\}$を, 同一の確率空間上で定義され, 同じ推移確率行列$\boldsymbol{P}$をもつ独立なマルコフ連鎖とする. ただし, $\{X_n^{(1)}\}$, $\{X_n^{(2)}\}$の初期分布はそれぞれ$\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$とする. 2つのマルコフ連鎖のカップリング時刻をτとすると, 定理 6.38 より, $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$となり, $\{X_n^{(1)}; n \ge \tau\}$と$\{X_n^{(2)}; n \ge \tau\}$は同じ分布に従う (注意 6.9 参照). したがって,

$$\mathsf{P}(X_n^{(1)} = i, \tau \le n) = \mathsf{P}(X_n^{(2)} = i, \tau \le n), \qquad n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{S}. \tag{216}$$

また, 任意の$n \in \mathbb{N}$および$i \in \mathbb{S}$に対して,

$$\mathsf{P}(X_n^{(1)} = i) = \mathsf{P}(X_n^{(1)} = i, \tau \le n) + \mathsf{P}(X_n^{(1)} = i, \tau > n),$$
$$\mathsf{P}(X_n^{(2)} = i) = \mathsf{P}(X_n^{(2)} = i, \tau \le n) + \mathsf{P}(X_n^{(2)} = i, \tau > n),$$

が成り立つので, これらと式(216)を用いて,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \in \mathbb{S}} |\mathsf{P}(X_n^{(1)} = i) - \mathsf{P}(X_n^{(2)} = i)| \\
&\quad = \sum_{i \in \mathbb{S}} |\mathsf{P}(X_n^{(1)} = i, \tau > n) - \mathsf{P}(X_n^{(2)} = i, \tau > n)| \\
&\quad \le \sum_{i \in \mathbb{S}} \{\mathsf{P}(X_n^{(1)} = i, \tau > n) + \mathsf{P}(X_n^{(2)} = i, \tau > n)\} \\
&\quad = 2 \sum_{i \in \mathbb{S}} \mathsf{P}(X_n^{(1)} = i, \tau > n) \qquad \text{(式(216)より)} \\
&\quad = 2\mathsf{P}(\tau > n), \qquad (217)
\end{aligned}$$

を得る. さらに, $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$から, $\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(\tau > n) = 0$となるので, 式(217)の両辺対して$n \to \infty$とすると, 次式が導かれる.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in\mathbb{S}}|\mathsf{P}(X_n^{(1)}=i)-\mathsf{P}(X_n^{(2)}=i)|=0. \tag{218}$$

ここで, マルコフ連鎖 $\{X_n^{(1)}\}$, $\{X_n^{(2)}\}$ の初期分布はそれぞれ $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ であるから,

$$\mathsf{P}(X_n^{(1)}=i)=\mathsf{P}_{\boldsymbol{\mu}}(X_n=i), \qquad i\in\mathbb{S},$$
$$\mathsf{P}(X_n^{(2)}=i)=\mathsf{P}_{\boldsymbol{\nu}}(X_n=i), \qquad i\in\mathbb{S}.$$

これらを式(218)に代入し, 式(215)を得る. □

6.29　極限分布

定義 6.16 任意の初期分布 $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)}$ が同じ確率ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_i)_{i\in\mathbb{S}}$ に収束するとき, $\boldsymbol{p}$ を極限分布とよぶ.

任意に固定された $i \in \mathbb{S}$ に対して, 2つの初期分布 $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ を

$$\mu_j = \delta_{i,j}, \quad \nu_j = \pi_j, \quad \forall j \in \mathbb{S},$$

とおくと, 定理6.39から次の結果が得られる.

命題 6.40 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ がエルゴード的(既約かつ非周期的で正再帰的)ならば, 次式が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = \pi_j, \quad \forall (i,j) \in \mathbb{S}^2. \tag{219}$$

つまり, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}$ が成立し, 極限分布と定常分布が一致する.

注意 6.10 極限分布の存在条件は, 非周期性を必要とし, 定常分布のそれより強い.

6.30　零再帰的な場合の極限分布

定理 6.41 状態空間$\mathbb{S}$上の推移確率行列$\boldsymbol{P}$が既約かつ零再帰的であるとき, $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{O}$が成り立つ.

証明　まず, $\boldsymbol{P}$が非周期的である場合について証明を与え, その結果を用いて周期的な場合の証明を行う.

定理 6.38の証明と同様に, 同一の確率空間上で定義され, 推移確率行列$\boldsymbol{P}$をもつ独立なマルコフ連鎖$\{X_n^{(1)}; n\in\mathbb{Z}_+\}$, $\{X_n^{(2)}; n\in\mathbb{Z}_+\}$からなるマルコフ連鎖$\{Z_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}); n\in\mathbb{Z}_+\}$を考える. マルコフ連鎖$\{Z_n\}$における状態$(i,i)$から$(j,j)$への$n$ステップ推移確率は$[P_{i,j}^{(n)}]^2$であたえられるので, $\{Z_n\}$が過渡的であるとすると, 系 6.18より,

$$\lim_{n\to\infty}[P_{i,j}^{(n)}]^2 = 0, \quad i,j\in\mathbb{S},$$

となる. したがって, $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{O}$が成り立つ.

以下では, $\{Z_n\}$ が再帰的な場合を考える. と同様に, 同一の確率空間上で定義され, 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ をもつ独立なマルコフ連鎖 $\{X_n^{(1)}; n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{X_n^{(2)}; n \in \mathbb{Z}_+\}$ の初期分布 $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\nu}$ を

$$\mu_j = \delta_{i,j}, \quad \nu_j = P_{i,j}, \quad j \in \mathbb{S}.$$

と定めると,

$$\mathsf{P}(X_n^{(1)} = j) = \sum_{k \in \mathbb{S}} \delta_{i,k} P_{k,j}^{(n)} = P_{i,j}^{(n)},$$

$$\mathsf{P}(X_n^{(2)} = j) = \sum_{k \in \mathbb{S}} P_{i,k} P_{k,j}^{(n)} = P_{i,j}^{(n+1)},$$

となるので, 次式が得られる (注意 6.9 参照).

$$\lim_{n\to\infty} |P_{i,j}^{(n)} - P_{i,j}^{(n+1)}| = 0, \qquad j \in \mathbb{S}. \tag{220}$$

さて, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{O}$ が成り立たないと仮定する. すなわち, ある $(i, i') \in \mathbb{S}^2$ に対して, 無限大に発散する非負の単調増加列 $\{n_\ell; \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ が存在して, $\lim_{\ell\to\infty} P_{i,i'}^{(n_\ell)} > 0$ となる. ここで, $i \in \mathbb{S}$ を任意に固定し, 非負行ベクトル $\boldsymbol{x} := (x_j)_{j \in \mathbb{S}}$ を定義する.

$$x_j = \lim_{\ell\to\infty} P_{i,j}^{(n_\ell)} \qquad j \in \mathbb{S}. \tag{221}$$

このとき, Fatou's lemmaと$x_{i'} > 0$より,

$$1 = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{i,j}^{(n_\ell)} \geq \sum_{j\in\mathbb{S}} \lim_{\ell\to\infty} P_{i,j}^{(n_\ell)} = \sum_{j\in\mathbb{S}} x_j \geq x_{i'} > 0. \tag{222}$$

さらに, 式(220)に対して, 優収束定理と式(221)を適用すると,

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\ell\to\infty} \left| P_{i,j}^{(n_\ell)} - \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{i,s}^{(n_\ell)} P_{s,j} \right| \\ &= \left| \lim_{\ell\to\infty} P_{i,j}^{(n_\ell)} - \sum_{j\in\mathbb{S}} \lim_{\ell\to\infty} P_{i,s}^{(n_\ell)} P_{s,j} \right| = \left| x_j - \sum_{j\in\mathbb{S}} x_s P_{s,j} \right|, \end{aligned}$$

が得られ, この結果と式(222)より, ベクトル$\boldsymbol{x}$は遷移確率行列$\boldsymbol{P}$に関する有界な定常測度ベクトルとなる. よって, 定常測度ベクトル$\boldsymbol{x}$を正規化することで, 定常分布ベクトルが構成することができ, $\boldsymbol{P}$は正再帰的となる(定理 6.27 参照). しかし, これは$\boldsymbol{P}$が零再帰的であるとした定理の仮定に矛盾する. よって, $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{O}$が成立する.

次に, $\boldsymbol{P}$ が周期 $d \geq 2$ を持つ場合を考える. 状態の並び順を適当に変えると, $\boldsymbol{P}^d$ は次のようにブロック対角化される (注意 6.1 参照).

$$
\boldsymbol{P}^d = \begin{array}{c} \\ \mathbb{S}_0 \\ \mathbb{S}_1 \\ \mathbb{S}_2 \\ \vdots \\ \mathbb{S}_{d-2} \\ \mathbb{S}_{d-1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \mathbb{S}_0 & \mathbb{S}_1 & \mathbb{S}_2 & \mathbb{S}_3 & \cdots & \mathbb{S}_{d-1} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\boldsymbol{P}_0 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{O} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\
\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_{d-1}
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

ここで, 対角ブロック行列 $\boldsymbol{P}_k$ $(k = 0, 1, \ldots, d-1)$ は既約かつ非周期的である. また, 推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ が零再帰的であるので, $\boldsymbol{P}_k$ も零再帰的となる. よって, 本証明の前半で示した結果から, 任意の $k = 0, 1, \ldots, d-1$ に対して, $\lim_{m\to\infty}(\boldsymbol{P}_k)^m = \boldsymbol{O}$ となり,

$$
\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{P}^{md} = \boldsymbol{O},
$$

が得られる. したがって,

$$m = \lfloor n/d \rfloor, \qquad \nu = n - \lfloor n/d \rfloor d$$

とおくと, 優収束定理より,

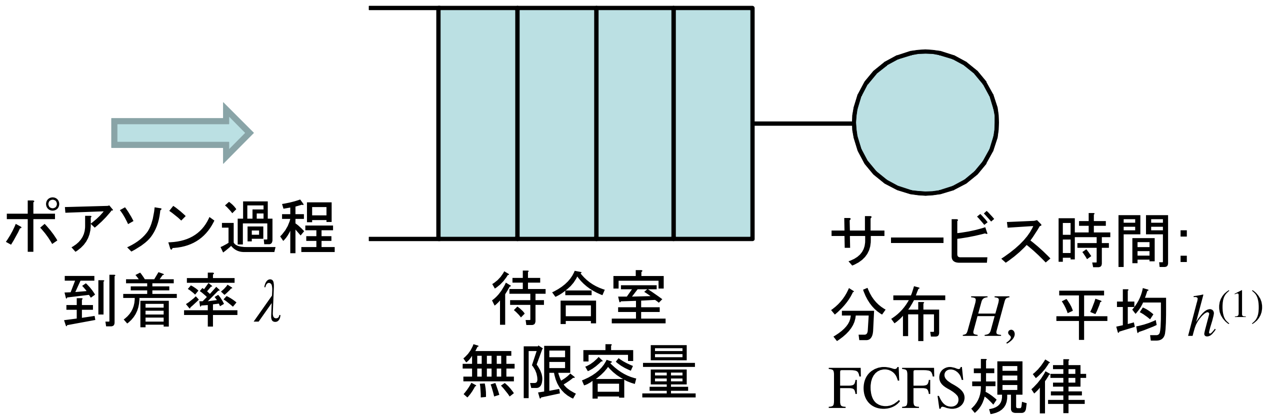
$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{P}^{md+\ell} = (\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{P}^{md})\boldsymbol{P}^{\ell} = \boldsymbol{O},$$

を得る. □

7 M/G/1 待ち行列

7.1 モデル

- 一つのサーバを有し, システムに客がいる限り, 休むことなく稼働する.
- 客は, 到着率 λ のポアソン過程に従って到着する.
- 到着した客はすべてシステムに収容され, サービスを受け終わるまで退去しない.
- 客が要求するサービス時間は, 独立でかつ同一の分布 H に従う. なお, 平均サービス時間 $h^{(1)}$ は正かつ有限とする.
- サービス規律は FCFS (先着順) とする.



7.2　任意時点と退去直後の系内客数分布

M/G/1 待ち行列の定義から以下の事実が成り立つ.

- M/G/1 待ち行列は, 単純待ち行列である.
- 客がポアソン過程に従って到着するので, 任意時点と到着直前の系内客数分布が一致する (PASTA).
- ポアソン到着と単一サーバの仮定より, 客の到着と退去は 1 つずつ発生する. したがって, 客一人あたりの系内滞在時間が確率 1 で有限であるとき, 到着直前と退去直後の系内客数分布が一致する (定理 5.5)

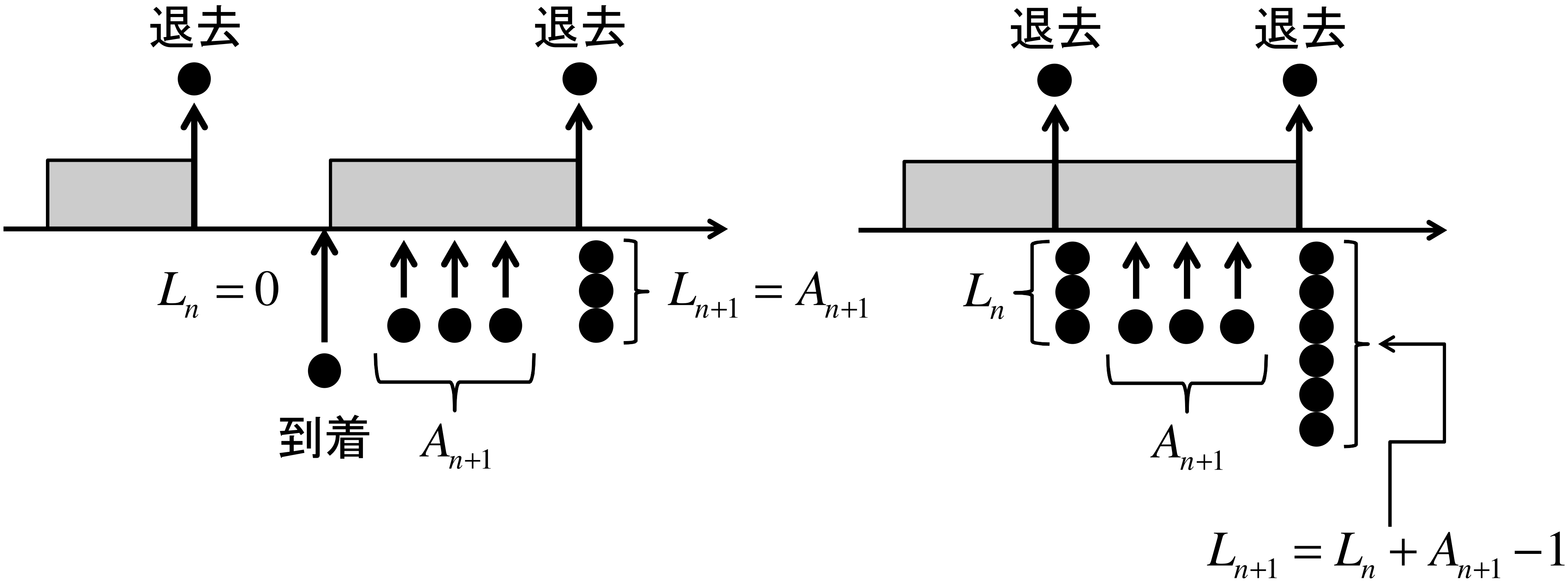
以上をまとめると, 定常状態にある M/G/1 待ち行列では,
客一人あたりの系内滞在時間が確率 1 で有限であるとき
任意時点, 到着直前, 退去直後の系内客数分布がすべて一致する.

7.3 退去直後に観測した系内客数過程

- L_n: n番目のサービス終了直後における系内客数
- A_n: n番目のサービス中に到着する客数

離脱時点で観測した系内客数過程$\{L_n; n \in \mathbb{Z}_;\}$は次式を満たす.

$$L_{n+1} = \max(L_n - 1, 0) + A_{n+1}. \tag{223}$$



7.4 サービス中の到着客数 $\{A_n\}$

- t_n $(n \in \mathbb{N})$: n 番目に到着した客のサービス開始時刻
- S_n $(n \in \mathbb{N})$: n 番目に到着した客のサービス時間
  - $\{S_n; n \in \mathbb{N}\}$ は独立かつ同一の分布 H に従う確率変数列
- $N(t,u]$ $(0 \le t < u)$: 時間区間 $(t,u]$ における客の到着数
  - 到着過程はポアソン過程 $\Longrightarrow$ $N(t,u]$ は定常増分かつ独立増分
  - $A_n = N(t_n, t_n + S_n] \overset{\mathrm{d}}{=} N(0, S_n]$

    $\Longrightarrow$ $A_n = N(t_n, t_n + S_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ は独立かつ同一分布に従う.

$$\mathsf{P}(A_n = k \mid S_n = x) = \mathsf{P}(N(0,x] = k) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\begin{aligned} a_k := \mathsf{P}(A_n = k) &= \int_0^\infty \mathsf{P}(A_n = k \mid S_n = x)\mathrm{d}\mathsf{P}(S_n \le x) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{d}H(x) > 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \tag{224}$$

7.5 系内客数過程の推移確率行列

- $\{L_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ が満たす再帰式

$$L_{n+1} = \max(L_n - 1, 0) + A_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

- $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ は独立かつ同一に分布 $\Longrightarrow$ $\{L_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ はマルコフ連鎖
- $\{L_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ の推移確率行列を $\boldsymbol{P}$ とすると,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{225}$$

- $a_k = \mathsf{P}(A_n = k) > 0$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{P}$ は既約かつ非周期

7.6 定常系内客数分布

式(225)で与えられる推移確率行列$\boldsymbol{P}$は既約であるため, 定常分布(ベクトル)は存在するとしたら一意である(注意6.7).

以下, 定常分布の存在条件を示す. ベクトル$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$が平衡方程式$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$を満たすと仮定すると,

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots) \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

となり, これを成分毎に書き下すと以下のようになる.

$$\pi_\ell = \pi_0 a_\ell + \sum_{i=1}^{\ell+1} \pi_i a_{\ell-i+1}, \qquad \ell \in \mathbb{Z}_+. \tag{226}$$

7.7 定常系内客数分布の再帰式

式(226)を$\pi_{\ell+1}$について解くと,

$$\pi_{\ell+1} = \frac{1}{a_0}\left(\pi_\ell - \pi_0 - \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i a_{\ell-i+1}\right), \qquad \ell \in \mathbb{Z}_+, \tag{227}$$

のように, ベクトル$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$に関する再帰式が得られる. したがって, π_0が求まれば, 再帰式(227)を用いて, 原理的には, M/G/1待ち行列の定常系内客数分布を計算することができる. しかし, 再帰式(227)による計算では, 引き算を繰り返し行う必要があるので, 桁落ちが発生し, 計算精度が著しく低下する恐れがある.

桁落ち

桁落ちとは, 計算機が保持する数値の桁数(有効桁数)が有限であるため, 値の近い数値を引き算することで有効桁数が減少し, 計算結果の精度が低下する現象のこと. 例えば, 有効桁が5である2つの数値1.6346×10^7と1.6345×10^7の引き算の結果は, $0.0001 \times 10^7 = 0.1 \times 10^4$となり有効桁は1となる.

以下では, 桁落ちの発生しにくい再帰式を与える.

定理 7.1 M/G/1 待ち行列の任意時点における定常系内客数分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ が存在し, π_0 が与えられているとする. このとき, π_k ($k \in \mathbb{N}$) は以下の再帰式で求めることができる.

$$\pi_k = \left[\pi_0\left(1 - \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell\right) + \sum_{i=1}^{k-1}\pi_i\left(1 - \sum_{j=0}^{k-i} a_j\right)\right]\frac{1}{a_0}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{228}$$

注意 7.1 任意の $m \in \mathbb{Z}_+$ に対して,

$$1 - \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell = \mathsf{P}(A_n \ge m) > 0,$$

であるので, 再帰式 (228) は, 再帰式 (227) より桁落ちを起こしにくい.

証明　まず, $k \in \mathbb{N}$ を任意に固定し, 式 (226) の両辺を $\ell = 0, 1, \ldots, k-1$ について和を取り, 二重和の順序を入れ替えるなどして, 次式を得る.

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{k-1} \pi_\ell &= \pi_0 \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell + \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{\ell+1} \pi_i a_{\ell-i+1} \\
&= \pi_0 \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell + \sum_{i=1}^{k} \pi_i \sum_{\ell=i-1}^{k-1} a_{\ell-i+1} \\
&= \pi_0 \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell + \sum_{i=1}^{k} \pi_i \sum_{j=0}^{k-i} a_j \\
&= \pi_0 \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_i \sum_{j=0}^{k-i} a_j + \pi_k a_0.
\end{aligned}
$$

これを, π_k について解くと, 以下のように式(228)を得ることができる.

$$
\pi_k = \left[\pi_0 \left(1 - \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell \right) + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_i \left(1 - \sum_{j=0}^{k-i} a_j \right) \right] \frac{1}{a_0}, \qquad k \in \mathbb{N}.
$$

□

7.8　系内客数分布の母関数

これまでの議論から, $\pi_0 > 0$ と定めたとき, 再帰式(228)から構成される $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ は, 厳密に正であり, 平衡方程式 $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$ を満たすことから, 定常測度ベクトルである. したがって, $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k < \infty$ を実現する $\pi_0 > 0$ が存在することと, $\boldsymbol{P}$ の定常分布が存在することは等価である.

以下では, 定常分布の存在条件を求める. そこで, 後の議論のため, 定常測度ベクトル $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ と分布 $\{a_k; k \in \mathbb{Z}_+\}$ の母関数を次のように定義する.

$$\widehat{\pi}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \pi_k, \qquad \widehat{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k.$$

定理 7.2 M/G/1 待ち行列の任意時点における定常系内客数分布 $\boldsymbol{\pi}$ が存在するための必要十分条件は $\rho < 1$ である. また, $\rho < 1$ であるとき, 定常系内客数分布の確率母関数 $\widehat{\pi}(z)$ は次式で与えられる.

$$\widehat{\pi}(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)\widetilde{H}(\lambda - \lambda z)}{z - \widetilde{H}(\lambda - \lambda z)}. \qquad (229)$$

証明　式(226)の両辺に z^ℓ をかけ, $\ell = 0, 1, \ldots$ について和を取ると,

$$\begin{aligned}\widehat{\pi}(z) &= \pi_0 \widehat{a}(z) + \sum_{\ell=0}^{\infty} z^\ell \sum_{i=1}^{\ell+1} \pi_i a_{\ell-i+1} \\ &= \pi_0 \widehat{a}(z) + z^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} z^i \pi_i \sum_{\ell=i-1}^{\infty} z^{\ell-i+1} a_{\ell-i+1} \\ &= \pi_0 \widehat{a}(z) + z^{-1} \{\widehat{\pi}(z) - \pi_0\} \widehat{a}(z).\end{aligned}$$

これを整理すると次のようになる.

$$\widehat{\pi}(z) = \frac{\pi_0 (z-1) \widehat{a}(z)}{z - \widehat{a}(z)}. \tag{230}$$

サービス時間分布 H の LST を $\widetilde{H}(s)$ とすると, 式(224)より,

$$\begin{aligned}\widehat{a}(z) &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{(\lambda x)^k}{k!} \mathrm{d}H(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \exp\{\lambda x z\} \mathrm{d}H(x) \\ &= \int_0^\infty e^{-(\lambda - \lambda z) x} \mathrm{d}H(x) = \widetilde{H}(\lambda - \lambda z).\end{aligned} \tag{231}$$

式(231)を式(230)に代入し, 次式を得る.

$$\widehat{\pi}(z) = \frac{\pi_0(z-1)\widetilde{H}(\lambda-\lambda z)}{z-\widetilde{H}(\lambda-\lambda z)}. \tag{232}$$

式(232)にロピタルの定理を適用し, $\lim_{z\uparrow 1}\widehat{\pi}(z) < \infty$ の成立条件を示す. そこで, $\widetilde{H}(0)=1$, $-\widetilde{H}'(0)=h^{(1)}$ (平均サービス時間), $\rho=\lambda h^{(1)}$ を用いると,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\uparrow 1}\widehat{\pi}(z) &= \lim_{z\uparrow 1}\pi_0\frac{\widetilde{H}(\lambda-\lambda z)-\lambda(z-1)\widetilde{H}'(\lambda-\lambda z)}{1+\lambda\widetilde{H}'(\lambda-\lambda z)} \\
&= \frac{\pi_0}{1-\lambda h^{(1)}} = \frac{\pi_0}{1-\rho},
\end{aligned}$$

となるので, $\widehat{\pi}(1) < \infty$ となるための必要十分条件は $\rho < 1$ である.

ここで, $\rho < 1$ を仮定し,

$$\pi_0 = 1-\rho,$$

と定めると, $\widehat{\pi}(1) = \sum_{k=0}^{\infty}\pi_k = 1$ となって, $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ は定常分布となる. さらに, 式(232)から, 式(229)を得る. □

7.9 系内客数分布のモーメント

定常系内客数を表す確率変数をLとすると,

$$\mathsf{P}(L=k)=\pi(k), \qquad k\in\mathbb{Z}_+,$$
$$\mathsf{E}[z^L]=\sum_{k=0}^{\infty} z^k\pi_k=\widehat{\pi}(z),$$

となる. よって, 定常系内客数Lのn次の階乗モーメントを$\pi^{(n)}$とおくと,

$$\begin{aligned}\pi^{(n)}&=\mathsf{E}[L(L-1)\cdots(L-n+1)]\\&=\lim_{z\uparrow 1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\widehat{\pi}(z).\end{aligned} \tag{233}$$

ここで, Sを任意客のサービス時間を表す確率変数とし, $h^{(n)}$をSのn次モーメントとする. すなわち,

$$h^{(n)}=\mathsf{E}[S^n]=(-1)^n\lim_{s\downarrow 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\widetilde{H}(s)=(-1)^n\widetilde{H}^{(n)}(0),$$

とすると, 次の結果を得る.

定理 7.3 $\rho < 1$のとき, 次式が成り立つ.

$$\pi^{(1)} = \frac{\lambda^2 h^{(2)}}{2(1-\rho)} + \rho, \tag{234}$$

$$\pi^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} \pi^{(i)} \frac{\lambda^{n+1-i} h^{(n+1-i)}}{(n+1)(1-\rho)} + \lambda^n h^{(n)}, \quad n \geq 2. \tag{235}$$

証明　式(229)の右辺の分母を払ったうえで, $n+1$回微分し, $z \uparrow 1$とする. まず, 左辺の計算を行う.

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \lim_{z \uparrow 1} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}z^{n+1}} \widehat{\pi}(z)(z - \widetilde{H}(\lambda - \lambda z)) \\
&= \lim_{z \uparrow 1} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}z^i} \widehat{\pi}(z) \cdot \frac{\mathrm{d}^{n+1-i}}{\mathrm{d}z^{n+1-i}} (z - \widetilde{H}(\lambda - \lambda z)) \\
&= \pi^{(n+1)} \lim_{z \uparrow 1} (z - \widetilde{H}(\lambda - \lambda z)) + (n+1)\pi^{(n)}(1 + \lambda \widetilde{H}'(0)) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} \pi^{(i)} \cdot (-1)^{n+2-i} \lambda^{n+1-i} \widetilde{H}^{(n+1-i)}(0)
\end{aligned}$$

$$= (n+1)\pi^{(n)}(1-\lambda h^{(1)}) - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}\pi^{(i)}\cdot\lambda^{n+1-i}h^{(n+1-i)}.$$

$$= (n+1)\pi^{(n)}(1-\rho) - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}\pi^{(i)}\cdot\lambda^{n+1-i}h^{(n+1-i)}. \tag{236}$$

つづいて, 右辺の計算を行う.

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= (1-\rho)\lim_{z\uparrow 1}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}z^{n+1}}(z-1)\widetilde{H}(\lambda-\lambda z) \\
&= (1-\rho)\lim_{z\uparrow 1}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\mathrm{d}^{i}}{\mathrm{d}z^{i}}(z-1)\cdot\frac{\mathrm{d}^{n+1-i}}{\mathrm{d}z^{n+1-i}}\widetilde{H}(\lambda-\lambda z) \\
&= (1-\rho)(n+1)\lim_{z\uparrow 1}\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}z^{n}}\widetilde{H}(\lambda-\lambda z) \\
&= (1-\rho)(n+1)\lambda^{n}h^{(n)}.
\end{aligned} \tag{237}$$

式(236)と(237)は等しいので,

$$\begin{aligned}
&(n+1)\pi^{(n)}(1-\rho) - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n+1}{i}\pi^{(i)}\cdot\lambda^{n+1-i}h^{(n+1-i)} \\
&\quad = (1-\rho)(n+1)\lambda^{n}h^{(n)},
\end{aligned} \tag{238}$$

が成り立ち, これを整理すると, 次のように, 式(235)が得られる.

$$\pi^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} \pi^{(i)} \frac{\lambda^{n+1-i} h^{(n+1-i)}}{(n+1)(1-\rho)} + \lambda^n h^{(n)}.$$

さらに, 式(235)において $n=1$ とすると,

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} \binom{2}{0} \frac{\lambda^2 h^{(2)}}{2(1-\rho)} + \lambda^1 h^{(1)} = \frac{\lambda^2 h^{(2)}}{2(1-\rho)} + \rho,$$

となり, 式(234)を得る. □

7.10 平均定常系内客数に対するサービス時間分布の影響

到着率 λ と平均サービス時間 $h^{(1)}$ を固定する. 式 (234) をサービス時間の分散 $\mathsf{Var}(S) = \mathsf{E}[S^2] - [h^{(1)}]^2$ を使って書き変えると次のようになる.

$$\mathsf{E}[L] = \frac{\lambda^2 \mathsf{Var}(S)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho. \tag{239}$$

これより, $\mathsf{E}[L]$ は $\mathsf{Var}(S)$ に関する単調増加関数であることがわかる. したがって, トラヒック強度 $\rho = \lambda h^{(1)}$ は固定されていたとしても, サービス時間のばらつきが大きくなると, 平均定常系内客数 $\mathsf{E}[L]$ は増大する.

一方, 固定長サービスモデル, すなわち, M/D/1 待ち行列の場合には, $\mathsf{Var}(S) = 0$ となるので, 平均定常系内客数 $\mathsf{E}[L]$ は最小となる. ここで, $L_{\mathrm{M/D/1}}$ を M/D/1 待ち行列の定常系内客数とすると, 式 (239) より,

$$\mathsf{E}[L_{\mathrm{M/D/1}}] = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho, \tag{240}$$

となる.

つぎに, M/M/1 待ち行列を考える. サービス時間 S は平均 $h^{(1)}$ の指数分布に従うので, Var$(S) = (h^{(1)})^2$ となる. これを式(239) に代入すると, M/M/1 待ち行列の定常系内客数 $L_{\mathrm{M/M/1}}$ の平均は次のように与えられる.

$$\mathsf{E}[L_{\mathrm{M/M/1}}] = \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho = 2\mathsf{E}[L_{\mathrm{M/D/1}}] - \rho. \tag{241}$$

今度は, 次のようなサービス時間分布を考える.

$$\mathsf{P}(S \le x) = 1 - \xi e^{-\xi\mu x} - (1-\xi)e^{-(1-\xi)\mu x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

ただし, $\xi \in (0, 1/2)$ とする. なお, 平均 $h^{(1)}$ と分散 Var(S) は次のようになる.

$$h^{(1)} = \mu^{-1}, \qquad \mathsf{Var}(S) = \frac{1}{\xi\mu^2} + \frac{1}{(1-\xi)\mu^2} = \frac{[h^{(1)}]^2}{\xi(1-\xi)}.$$

これらを式(239) に代入すると,

$$\mathsf{E}[L] = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\frac{1}{\xi(1-\xi)} + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho.$$

したがって, $\xi \downarrow 0$ とすると, $\mathsf{E}[L] \to \infty$ となる.

7.11 リトルの公式の応用

- L_s: 定常状態においてサーバにいる客数

$$\mathsf{E}[L_s] = \lambda h^{(1)} = \rho \quad \text{(リトルの公式)}.$$

- L_q: 定常状態において待合室にいる客数

$$\mathsf{E}[L_q] = \mathsf{E}[L] - \mathsf{E}[L_s] = \frac{\lambda^2 h^{(2)}}{2(1-\rho)}. \tag{242}$$

- W: 定常状態における任意客の系内滞在時間

$$\mathsf{E}[W] = \mathsf{E}[L]/\lambda = \frac{\lambda h^{(2)}}{2(1-\rho)} + h^{(1)}. \tag{243}$$

- W_q: 定常状態における任意客の待ち時間

$$\mathsf{E}[W_q] = \mathsf{E}[L_q]/\lambda = \frac{\lambda h^{(2)}}{2(1-\rho)}. \tag{244}$$

7.12 待ち時間・系内滞在時間分布

安定条件 $\rho < 1$ と先着順サービス規律を仮定する. 定常状態における任意客の待ち時間と系内滞在時間をそれぞれ, W_q, W とすると, 次のような結果が成り立つ.

定理 7.4

$$\mathsf{E}[\exp\{-sW_q\}] = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda\widetilde{H}(s)}, \tag{245}$$

$$\mathsf{E}[\exp\{-sW\}] = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda\widetilde{H}(s)}\widetilde{H}(s). \tag{246}$$

証明　先着順サービス規律を仮定しているので, 定常状態における任意客の退去直後の系内客数は, 退去した客の系内滞在時間中に到着した客数に等しい. さらに, 退去直後の系内客数分布と任意時点での系内客数分布が等しいので,

$$L \stackrel{\mathrm{d}}{=} N(0, W],$$

となる. よって, 次式が成り立つ.

$$\mathsf{P}(L=k) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathsf{P}(x < W \le x+\mathrm{d}x), \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{247}$$

式 (247) を用いて, 系内客数 L の確率母関数を計算すると次のようになる.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[z^L] &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathsf{P}(L=k) = \int_0^\infty \sum_{k=0}^{\infty} z^k e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \mathsf{P}(x < W \le x + \mathrm{d}x) \\ &= \int_0^\infty \exp\{-\lambda(1-z)x\} \mathsf{P}(x < W \le x + \mathrm{d}x) \\ &= \mathsf{E}[\exp\{-\lambda(1-z)W\}]. \end{aligned} \tag{248}$$

式 (248) に式 (229) を代入する.

$$\mathsf{E}[\exp\{-\lambda(1-z)W\}] = \frac{(1-\rho)(z-1)\widetilde{H}(\lambda - \lambda z)}{z - \widetilde{H}(\lambda - \lambda z)}.$$

上の式において, $z = 1 - s/\lambda$ とすると,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[\exp\{-sW\}] &= \frac{(1-\rho)(-s/\lambda)\widetilde{H}(s)}{1 - s/\lambda - \widetilde{H}(s)} \\ &= \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda + \lambda \widetilde{H}(s)} \widetilde{H}(s), \end{aligned} \tag{249}$$

となって, 式 (246) を得る.

ここで, W_q とは独立で, かつ, サービス時間分布に従う確率変数を S とすると, $W \overset{\mathrm{d}}{=} W_q + S$ であり,

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\exp\{-sW\}] &= \mathsf{E}[\exp\{-s(W_q + S)\}] \\ &= \mathsf{E}[\exp\{-sW_q\}]\mathsf{E}[\exp\{-sS\}] \\ &= \mathsf{E}[\exp\{-sW_q\}]\widetilde{H}(s), \end{aligned}$$

となるので, これと式(246)から, 式(245)を得る. $\square$

7.13　待ち時間・系内滞在時間分布の畳込み表現

式 (245) を次のように変形することができる.

$$\mathsf{E}[\exp\{-sW_q\}] = \frac{1-\rho}{1-\lambda\dfrac{1-\widetilde{H}(s)}{s}} = \frac{1-\rho}{1-\rho\dfrac{1-\widetilde{H}(s)}{h^{(1)}s}}. \tag{250}$$

同様にして, 式 (246) は

$$\mathsf{E}[\exp\{-sW\}] = \frac{1-\rho}{1-\rho\dfrac{1-\widetilde{H}(s)}{h^{(1)}s}}\widetilde{H}(s). \tag{251}$$

となる. ここで, 関数 $H_e : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を次のように定義する.

$$H_e(x) = \frac{1}{h^{(1)}}\int_0^x (1-H(y))\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}_+. \tag{252}$$

関数 H_e は連続かつ単調非減少であり, $H_e(0)=0$ と次式を満たす.

$$\lim_{x\to\infty} H_e(x) = \frac{1}{h^{(1)}}\int_0^\infty (1-H(y))\mathrm{d}y = 1.$$

よって, H_e は分布関数であり (定理 3.8 参照), サービス時間分布 H に関する平衡分布でもある (定義 4.4).

したがって, H_e のLST$\widetilde{H}_e(s)$は,

$$\widetilde{H}_e(s) = \frac{1-\widetilde{H}(s)}{h^{(1)}s}$$

となり, これを式(250)に代入して, さらに変形を行うと次のようになる.

$$\mathsf{E}[\exp\{-sW_q\}] = \frac{1-\rho}{1-\rho\widetilde{H}_e(s)} = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(\widetilde{H}_e(s))^n.$$

また, 同様の操作を式(251)に対して行うと,

$$\mathsf{E}[\exp\{-sW\}] = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(\widetilde{H}_e(s))^n\widetilde{H}(s).$$

を得る. 最後に, 上で求めたLSTに対して逆変換を行うことで, 次式が導かれる.

$$\mathsf{P}(W_q \le x) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n H_e^{*n}(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+,$$

$$\mathsf{P}(W \le x) = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n H_e^{*n} * H(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

7.14 M/M/1 待ち行列

サービス時間 S が平均 μ^{-1} の指数分布に従う場合を考える.

$$H(x) = \mathsf{P}(S \le x) = 1 - e^{-\mu x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

このとき, サービス時間分布の LST $\widetilde{H}(s)$ は次式で与えられる.

$$\widetilde{H}(s) = \frac{\mu}{s+\mu}.$$

これを式 (246) に代入すると

$$\mathsf{E}[\exp\{-sW\}] = \frac{(1-\rho)s\dfrac{\mu}{s+\mu}}{s-\lambda+\lambda\dfrac{\mu}{s+\mu}} = \frac{(1-\rho)s\dfrac{\mu}{s+\mu}}{s-\lambda\dfrac{s}{s+\mu}}$$
$$= \frac{(1-\rho)\mu}{s+\mu-\lambda} = \frac{\mu-\lambda}{s+\mu-\lambda},$$

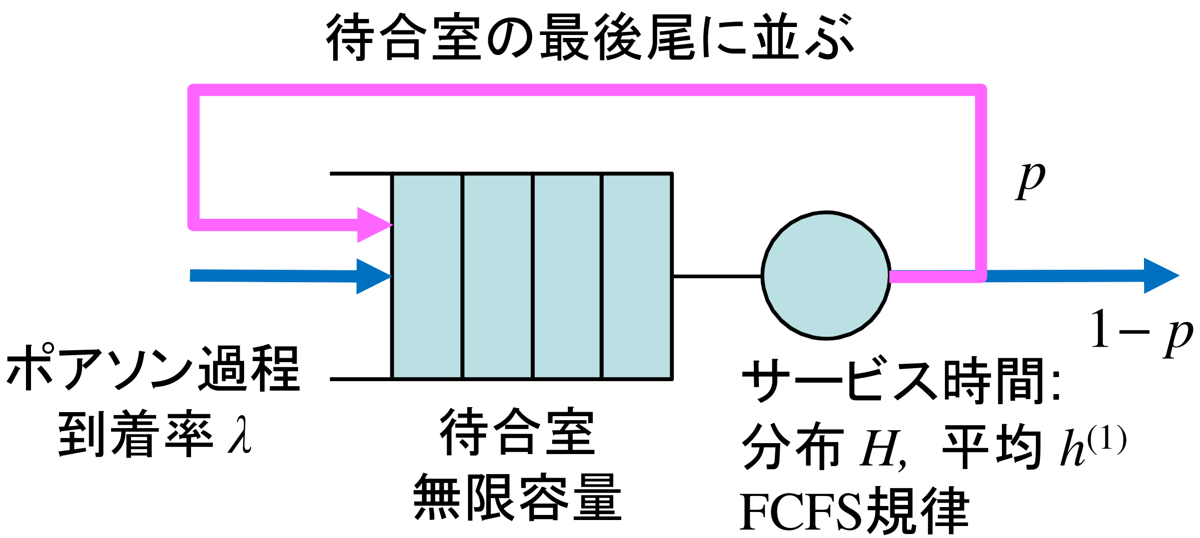
となり，これを逆変換すると，次式を得る.

$$\mathsf{P}(W \le x) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+.$$

8　フィードバックのあるM/G/1待ち行列

8.1　モデル

- 単一サーバ, 容量無限の待合室, 到着率 λ のポアソン過程
- サービス規律: 待合室に並んでいる順にサービスされる
  - 外部から到着した客は待合室の最後尾に並ぶ
  - サービスを受け終えた客は確率 p で待合室の最後尾に並び(フィードバック), 確率 $1-p$ で退去する
- サービス時間: 独立で同一分布 H に従う. 平均 $h^{(1)} \in (0, \infty)$



8.2　任意時点と退去直後の系内客数分布

通常のM/G/1待ち行列と同じく, 以下の事実が成り立つ.

- ポアソン到着

  $\Longrightarrow$ PASTA: 任意時点と到着直前の系内客数分布が一致

- 到着・退去が1つずつ発生

  $\Longrightarrow$ 到着直前と退去直後の系内客数分布が一致(定理5.5)

> 任意時点と退去直後の系内客数分布が一致

8.3　退去直後に観測した系内客数過程

- L_n: n 番目のサービス終了直後における系内客数
- A_n: n 番目のサービス中に到着する客数

$$a_k = \mathsf{P}(A_n = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \mathrm{d}H(x) > 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\widetilde{a}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k = \widetilde{H}(\lambda - \lambda z).$$

- C_n: n 番目の客がフィードバックするなら 1, そうでないなら 0 を取る

$$\mathsf{P}(C_n = 1) = p, \qquad \mathsf{P}(C_n = 0) = 1 - p \tag{253}$$

通常の M/G/1 待ち行列との違いは, サービスを終えた客がフィードバックするか, しないかだけなので, $\{L_n\}$ の再帰式は次のようになる.

$$L_{n+1} = \max(L_n - 1, 0) + A_{n+1} + C_{n+1} \tag{254}$$

$\Longrightarrow \{L_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ はマルコフ連鎖

8.4 系内客数過程の遷移確率行列

$P_{i,j} = \mathsf{P}(L_{n+1} = j \mid L_n = i)$ とおくと, 再帰式(254)より

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j P_{0,j} = \mathsf{E}[z^{L_{n+1}} \mid L_n = 0] = \mathsf{E}[z^{A_{n+1}+C_{n+1}}]. \tag{255}$$

A_{n+1} と C_{n+1} は独立であるので,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[z^{A_{n+1}+C_{n+1}}] &= \mathsf{E}[z^{A_{n+1}}]\mathsf{E}[z^{C_{n+1}}] \\ &= \widehat{a}(z)(1-p+pz) \\ &= (1-p)\widehat{a}(z) + pz\widehat{a}(z).\end{aligned} \tag{256}$$

ここで, b_k ($k \in \mathbb{Z}_+$) および $\widehat{b}(z)$ を次のように定義する.

$$b_k = (1-p)a_k + pa_{k-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{257}$$

$$\widehat{b}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k b_k = (1-p)\widehat{a}(z) + pz\widehat{a}(z). \tag{258}$$

ただし, $a_{-1} = 0$ とする. このとき, 式(256)は次のように書ける.

$$\mathsf{E}[z^{A_{n+1}+C_{n+1}}] = \widehat{b}(z). \tag{259}$$

これを式(255)に代入し, $a_{-1}=0$とすると, 次式を得る.

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j P_{0,j} = \widehat{b}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j b_j.$$

上式の両辺の係数比較をすると,

$$P_{0,j} = b_j = (1-p)a_j + pa_{j-1}, \qquad j \in \mathbb{Z}_+, \tag{260}$$

となる.

また, $i \ge 1$の場合を考えると,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} z^j P_{i,j} &= \mathsf{E}[z^{L_{n+1}} \mid L_n = i] \\ &= z^{i-1}\mathsf{E}[z^{i-1+A_{n+1}+C_{n+1}}] \\ &= z^{i-1}\mathsf{E}[z^{A_{n+1}}]\mathsf{E}[z^{C_{n+1}}] = z^{i-1}\widehat{b}(z),\end{aligned} \tag{261}$$

が成り立つので, 両辺の係数比較を行い, 次式を得る.

$$P_{i,j} = \begin{cases} b_{j-i+1} = (1-p)a_{j-i+1} + pa_{j-i}, & j \ge i-1, \\ 0 & 0 \le j < i-1. \end{cases} \tag{262}$$

式(260)と(262)より, マルコフ連鎖$\{L_n\}$の遷移確率行列$\boldsymbol{P}$は次式で与えられる.

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{263}$$

ここで, $b_k = (1-p)a_k + pa_{k-1} > 0$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$より, $\boldsymbol{P}$は既約かつ非周期である.

また, 上の推移確率行列は, 式(225)で与えられる推移率行列の$\{a_k\}$を$\{b_k\}$に置き換えたものと等しい. したがって, 通常のM/G/1待ち行列における$\{a_k\}$を$\{b_k\}$に変えるだけで, 系内客数分布の再帰式や確率母関数が得られる.

$$\pi_k = \left[\pi_0\left(1-\sum_{l=0}^{k-1} b_l\right) + \sum_{i=1}^{k-1}\pi_i\left(1-\sum_{j=0}^{k-i} b_j\right)\right]\frac{1}{b_0}. \tag{264}$$

$$\widehat{\pi}(z) = \frac{\pi_0(z-1)\widehat{b}(z)}{z-\widehat{b}(z)}. \tag{265}$$

さらに, 式(231)を$\widehat{b}(z)$の定義式(258)に代入すると,

$$\widehat{b}(z) = (1-p+pz)\widetilde{H}(\lambda - \lambda z).$$

となるので, これを式(265)に代入し, 次式を得る.

$$\widehat{\pi}(z) = \frac{\pi_0(z-1)(1-p+pz)\widetilde{H}(\lambda-\lambda z)}{z-(1-p+pz)\widetilde{H}(\lambda-\lambda z)}. \tag{266}$$

以下, 式(266)にロピタルの定理を適用し, $\lim_{z\uparrow 1}\widehat{\pi}(z) < \infty$の成立条件を示す.

$\widetilde{H}(0)=1$, $-\widetilde{H}'(0)=h^{(1)}$ (平均サービス時間), $\rho=\lambda h^{(1)}$を用いると,

$$\lim_{z\uparrow 1}\widehat{\pi}(z) = \frac{\pi_0}{1-p-\lambda h^{(1)}} = \frac{\pi_0}{1-p-\rho}$$

となるので, $\widehat{\pi}(1) < \infty$となるための必要十分条件は$\rho < 1-p$である.

また, $\rho < 1-p$のとき, π_0は次式で与えられる.

$$\pi_0 = 1-p-\rho. \tag{267}$$

さらに, これを式(266)に代入すると,

$$\widehat{\pi}(z) = \frac{(1-p-\rho)(z-1)(1-p+pz)\widetilde{H}(\lambda-\lambda z)}{z-(1-p+pz)\widetilde{H}(\lambda-\lambda z)}, \tag{268}$$

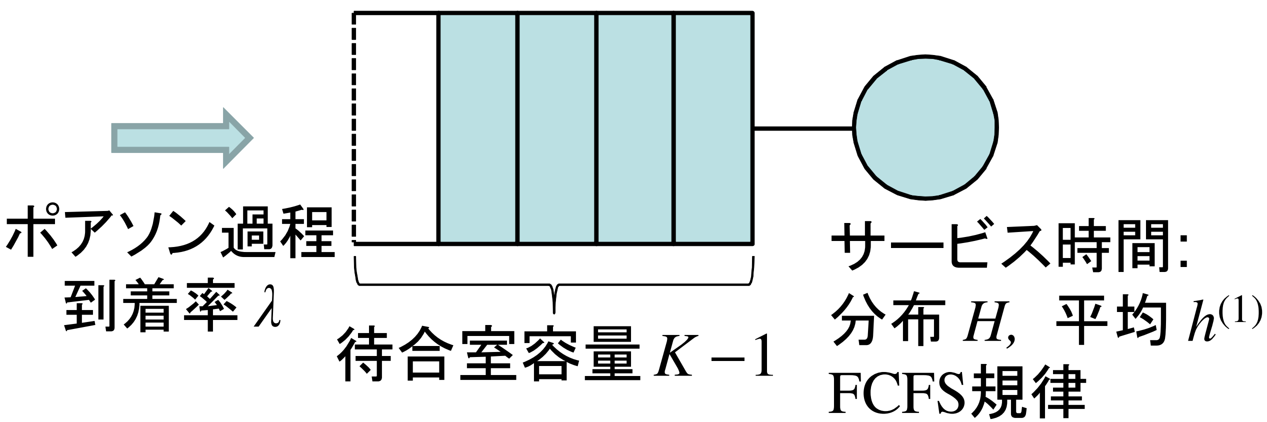
が得られる.

9　M/G/1/K 待ち行列

9.1　モデルの説明

- 単一サーバ
- システム容量(待合室 + サーバ) は $K \geq 1$

  $\Longrightarrow$ 待合室の容量は $K - 1$
- 到着過程: 到着率 λ のポアソン過程
- サービス時間: 独立で同一分布 H に従う. 平均 $h^{(1)} \in (0, \infty)$
- サービス規律: FCFS
- トラヒック強度: $\rho \triangleq \lambda h^{(1)} < 1$ (安定条件)



9.2 退去直後の系内客数過程

次のように記号を定義する.

- L_n: n 番目のサービス終了直後における系内客数
- A_n: n 番目のサービス中に到着する客数

M/G/1 待ち行列と同様に, $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ は独立かつ同一に次のように分布する.

$$a_k = \mathsf{P}(A_n = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \mathrm{d}H(x) > 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

つづいて, 離散時間確率過程 $\{L_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ の再帰式を導出する.

$L_n = 0$ のとき, n と $n+1$ 番目の退去時刻間での到着数は $1 + A_{n+1}$ であり, そのうち K までしかシステムに収容されない. よって,

$$L_{n+1} = \min(1 + A_{n+1}, K) - 1 = \min(A_{n+1}, K - 1). \tag{269}$$

一方, $L_n > 0$ のとき, n 番目のサービス終了直前の客数は $\min(L_n + A_{n+1}, K)$ であるので,

$$L_{n+1} = \min(L_n + A_{n+1}, K) - 1 = \min(L_n - 1 + A_{n+1}, K - 1). \tag{270}$$

式(269)と(270)を合わせると, 次式を得る.

$$L_{n+1} = \min(\max(L_n - 1, 0) + A_{n+1}, K - 1). \tag{271}$$

よって, $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ が独立かつ同一に分布することから, $\{L_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ はマルコフ連鎖となる.

以下では, 式(271)から, マルコフ連鎖 $\{L_n\}$ の推移確率を求める. まず, $L_n = 0$ のとき, $L_{n+1} = \min(A_{n+1}, K-1)$ であるので,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(L_{n+1} = j \mid L_n = 0) &= \mathsf{P}(\min(A_{n+1}, K-1) = j \mid L_n = 0) \\ &= \begin{cases} a_j, & 0 \le j \le K-2 \\ \sum_{\ell=K-1}^{\infty} a_\ell, & j = K-1. \end{cases} \end{aligned} \tag{272}$$

次に, $L_n = i > 0$ の場合には, $L_{n+1} = \min(i - 1 + A_{n+1}, K-1)$ となるので,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(L_{n+1} = j \mid L_n = i) &= \mathsf{P}(\min(i - 1 + A_{n+1}, K-1) = j \mid L_n = i) \\ &= \mathsf{P}(\min(A_{n+1}, K-i) = j - i + 1) \\ &= \begin{cases} 0, & 0 \le j \le i-2, \\ a_{j-i+1}, & i-1 \le j \le K-2 \\ \sum_{\ell=K-i}^{\infty} a_\ell, & j = K-1. \end{cases} \end{aligned} \tag{273}$$

したがって, マルコフ連鎖$\{L_n\}$の推移確率行列を$\boldsymbol{P}^{(N)}$とすると,

$$\boldsymbol{P}^{(K)} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{K-2} & \overline{a}_{K-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{K-2} & \overline{a}_{K-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{K-3} & \overline{a}_{K-2} \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & a_{K-4} & \overline{a}_{K-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & \overline{a}_1 \end{pmatrix}, \tag{274}$$

となる. ただし, $\overline{a}_k = \sum_{\ell=k}^{\infty} a_\ell$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) とする. 任意の$k \in \mathbb{Z}_+$に対して, $a_k > 0$であったので, 推移確率行列$\boldsymbol{P}^{(K)}$は既約となる. また, $\boldsymbol{P}^{(K)}$は有限次であることから, 正再帰的でとなり, 唯一の定常分布ベクトルをもつ(系 6.29参照).

そこで, $\boldsymbol{P}^{(K)}$の定常分布ベクトルを$\boldsymbol{\pi}^{(K)} = (\pi_0^{(K)}, \pi_1^{(K)}, \dots, \pi_{K-1}^{(K)})$とすると, 平衡方程式より, 次式を得る.

$$\pi_\ell^{(K)} = \pi_0^{(K)} a_\ell + \sum_{i=1}^{\ell+1} \pi_i^{(K)} a_{\ell-i+1}, \quad \ell = 0, 1, \dots, K-2, \tag{275}$$

$$\pi_{K-1}^{(K)} = \pi_0^{(K)} \overline{a}_{K-1} + \sum_{i=1}^{K-1} \pi_i^{(K)} \overline{a}_{K-i}. \tag{276}$$

定理 9.1 $\rho < 1$であるとき, M/G/1/K待ち行列の退去直後の系内客数分布 $\{\pi_\ell^{(K)}; \ell = 0, 1, \dots, K-1\}$ は, M/G/1待ち行列の(任意時点での)系内客数分布 $\{\pi_\ell; \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ を用いて次のように与えられる.

$$\pi_\ell^{(K)} = \frac{\pi_\ell}{\sum_{i=0}^{K-1} \pi_i}, \qquad \ell = 0, 1, \dots, K-1. \tag{277}$$

<u>証明</u> $\rho < 1$の下では, M/G/1待ち行列の系内客数分布 $\{\pi_\ell\}$ は確かに存在する. さらに, $\{\pi_\ell\}$ が満たす平衡方程式(226)は, $\{\pi_\ell^{(K)}\}$ が満たす平衡方程式の一つ, 式(275)と同じ構造をしている. 両者を並べると次のようになる.

$$\text{(M/G/1/}K\text{)} \quad \pi_\ell^{(K)} = \pi_0^{(K)} a_\ell + \sum_{i=1}^{\ell+1} \pi_i^{(K)} a_{\ell-i+1}, \quad 0 \le \ell \le K-2,$$

$$\text{(M/G/1)} \quad \pi_\ell = \pi_0 a_\ell + \sum_{i=1}^{\ell+1} \pi_i a_{\ell-i+1}, \qquad \ell \in \mathbb{Z}_+.$$

したがって, 次式を満たす正定数$c > 0$が存在する.

$$\pi_\ell^{(K)} = c\pi_\ell, \qquad \ell = 0, 1, \dots, K-1.$$

これと $\sum_{i=0}^{K-1} \pi_i^{(K)} = 1$ から,

$$c = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K-1} \pi_i},$$

となって, 式(277)を得る. □

9.3 離脱直後の系内客数分布の再帰式

$k \le K-1$として, 式(275)の両辺を$\ell = 0, 1, \ldots, k-1$について和を取ると,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{k-1} \pi_\ell^{(K)} &= \pi_0^{(K)} \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell + \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{\ell+1} \pi_i^{(K)} a_{\ell-i+1} \\
&= \pi_0 \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell + \sum_{i=1}^{k} \pi_i^{(K)} \sum_{\ell=i-1}^{k-1} a_{\ell-i+1} = \pi_0^{(K)} \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell + \sum_{i=1}^{k} \pi_i^{(K)} \sum_{j=0}^{k-i} a_j \\
&= \pi_0^{(K)} \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_i^{(K)} \sum_{j=0}^{k-i} a_j + \pi_k^{(K)} a_0,
\end{aligned}
$$

となって, 次式を得る.

$$
\pi_k^{(K)} = \left[\pi_0^{(K)} \left(1 - \sum_{\ell=0}^{k-1} a_\ell \right) + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_i^{(K)} \left(1 - \sum_{j=0}^{k-i} a_j \right) \right] \frac{1}{a_0}, \ 0 \le k \le K-1.
$$

$\pi_0^{(K)} = 1$を初期値とし, 上の再帰式を用いて$\pi_j^{(K)}$ $(j = 1, 2, \ldots, K-1)$を計算した後, 総和が1になるよう正規化すればよい.

9.4 任意時点での系内客数分布

- $L(t)$: 時刻tでの系内客数
- $p_j^{(K)} = \lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(L(t) = j)$ ($j = 0, 1, \ldots, K$)

(i) PASTA $\Longrightarrow$ $\{p_j^{(K)}\}$ は到着直前の系内客数分布に等しい

$\Longrightarrow$ 「到着した客がシステムに収容される確率」 $= 1 - p_K^{(K)}$

$\Longrightarrow$ システムに収容される客がみる系内客数分布は

$$\left\{ \frac{p_j^{(K)}}{1 - p_K^{(K)}}; j = 0, 1, \ldots, K-1 \right\}$$

(ii) システムに収容される客がみる系内客数分布は, 退去直後の系内客数分布 $\{\pi_j^{(K)}; j = 0, 1, \ldots, K-1\}$ に等しい (定理 5.6)

$$\frac{p_j^{(K)}}{1 - p_K^{(K)}} = \pi_j^{(K)}, \quad j = 0, 1, \ldots, K-1. \tag{278}$$

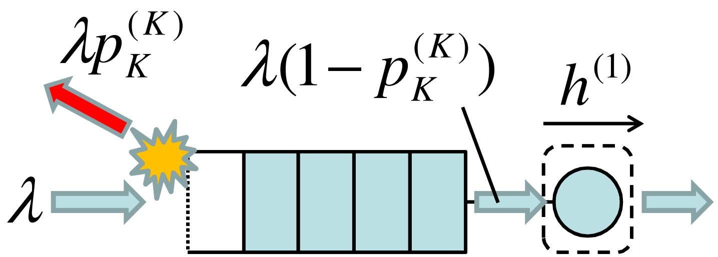
式(278)において, $j = 0$とすると次式を得る.

$$p_0^{(K)} = (1 - p_K^{(K)})\pi_0^{(K)} \tag{279}$$

(iii) サーバ部分にリトルの公式を適用

$$1 - p_0^{(K)} = (1 - p_K^{(K)})\lambda \cdot h^{(1)} = (1 - p_K^{(K)})\rho \qquad (280)$$

- サーバ部分の平均客数: $(1 - p_0^{(K)}) \times 1$
- サーでの平均滞在時間(平均サービス時間): $h^{(1)}$
- サーバへの到着率: $(1 - p_K^{(K)})\lambda$



式(279)と(280)より, $p_0^{(K)}$ を消去して $p_K^{(K)}$ について解くと,

$$p_K^{(K)} = 1 + \frac{1}{\pi_0^{(K)} + \rho}. \qquad (281)$$

式(278)と(281)より次の結果を得る.

定理 9.2 M/G/1/K 待ち行列における任意時点での系内客数分布 $\{p_j^{(K)}\}$ は，退去直後の系内客数分布 $\{\pi_j^{(K)}\}$ を用いて次のように与えられる．

$$p_j^{(K)} = \frac{\pi_j^{(K)}}{\pi_0^{(K)} + \rho}, \qquad j = 0, 1, \ldots, K-1,$$

$$p_K^{(K)} = 1 - \frac{1}{\pi_0^{(K)} + \rho}. \tag{282}$$

9.5 呼損率

呼損率とは, システムに到着した客のうち, 待合室に空きがなくサービスを受けられなかった客の割合である. つまり, 呼損率は, 到着時に待合室に空きがない確率である. また, M/G/1/K 待ち行列では, 到着時と任意時点での系内客数分布は一致する (PASTA). 以上のことから, M/G/1/K 待ち行列の呼損率を $P_{\rm loss}^{(K)}$ とおくと, $P_{\rm loss}^{(K)} = p_K^{(K)}$ となる. よって, 式(282) から次式を得る.

$$P_{\rm loss}^{(K)} = 1 - \frac{1}{\pi_0^{(K)} + \rho}. \tag{283}$$

さらに, 定理 9.1 を用いると次の結果を得る.

定理 9.3 $\rho < 1$ であるとき, M/G/1/K 待ち行列の呼損率 $P_{\rm loss}^{(K)}$ は

$$P_{\rm loss}^{(K)} = \frac{(1-\rho)\overline{\pi}_K}{1-\rho\overline{\pi}_K}, \tag{284}$$

で与えられる. ただし, $\overline{\pi}_K$ は M/G/1 待ち行列において任意時点での系内客数が K 以上となる確率である. すなわち, $\overline{\pi}_K = \sum_{\ell=K}^{\infty} \pi_\ell$ である.

証明　式(277)と$\pi_0 = 1 - \rho$を用いて, 式(283)を書き換えると,

$$
\begin{aligned}
P_{\text{loss}}^{(K)} &= 1 - \frac{1}{\dfrac{1-\rho}{\sum_{i=0}^{K-1} \pi_i} + \rho} = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{K-1} \pi_i}{1 - \rho + \rho \displaystyle\sum_{i=0}^{K-1} \pi_i} \\
&= 1 - \frac{\sum_{i=0}^{K-1} \pi_i}{1 - \rho \overline{\pi}_K} = \frac{1 - \sum_{i=0}^{K-1} \pi_i - \rho \overline{\pi}_K}{1 - \rho \overline{\pi}_K} \\
&= \frac{(1-\rho)\overline{\pi}_K}{1 - \rho \overline{\pi}_K},
\end{aligned}
$$

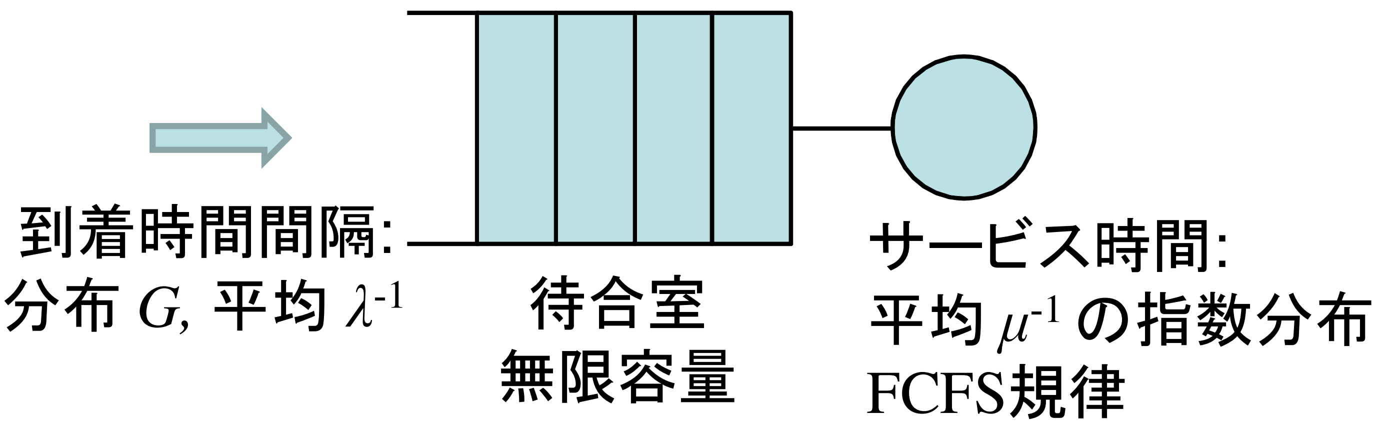
となって, 式(284)を得る. □

10 GI/M/1 待ち行列

10.1 モデル

- 単一サーバ
- 待合室の容量は無限
- 到着時間間隔: 独立かつ同一分布 G に従う. 平均 $\lambda^{-1} \in (0, \infty)$

  $\Longrightarrow \lambda =$ “到着率”
- サービス時間: 独立かつ同一に平均 μ^{-1} の指数分布に従う
- サービス規律: FCFS
- トラヒック強度: $\rho \triangleq \lambda\mu^{-1} < 1$ (安定条件)



10.2 到着直前で観測した系内客数過程

- L_n: n番目の到着直前における系内客数
- B_n: $n-1$番目とn番目の到着時刻間での退去数

$$L_{n+1} = L_n + 1 - B_{n+1} \tag{285}$$

B_nがL_nに依存するので ($0 \leq B_n \leq L_n$), 解析しにくい.

- B'_n: 系内に客がいなくなった後も, 仮想的な客がサービスを受けて退去し続けるとみなしたときの$n-1$番目とn番目の到着時刻間での退去数

$$L_{n+1} = (L_n + 1 - B'_{n+1})^+ \tag{286}$$

サービス時間が独立かつ同一に平均μ^{-1}の指数分布に従う

$\Longrightarrow$ 仮想的な客を含めた退去はポアソン過程

$\Longrightarrow$ $\{B'_n\}$は独立かつ同一に分布(ポアソン過程の定常性, 独立増分性)

$$b_k := \mathsf{P}(B'_n = k) = \int_0^\infty e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} \mathrm{d}G(x) > 0 \tag{287}$$

$\Longrightarrow$ $\{L_n\}$はマルコフ連鎖となる

10.3 系内客数過程の推移確率行列

- $\{L_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ が満たす再帰式:

$$L_{n+1} = (L_n + 1 - B'_{n+1})^+$$

$b_k = \mathsf{P}(B'_n = k)$, $\overline{b}_k = \sum_{m=k}^{\infty} b_m$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) とおくと

$$\mathsf{P}(L_{n+1} = j \mid L_n = i) = \begin{cases} \overline{b}_{i+1}, & i \in \mathbb{Z}_+,\ j = 0, \\ b_{i-j+1}, & i \in \mathbb{Z}_+,\ 1 \le j \le i+1, \\ 0, & i \in \mathbb{Z}_+,\ j \ge i+2. \end{cases} \tag{288}$$

- $\{L_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ の推移確率行列 $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \overline{b}_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \overline{b}_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots \\ \overline{b}_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots \\ \overline{b}_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{289}$$

- $b_k = \mathsf{P}(B'_n = k) > 0\ (k \in \mathbb{Z}_+) \Longrightarrow \boldsymbol{P}$ は既約かつ非周期

10.4 到着直前の系内容数分布

式 (289) で与えられる推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ の定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi} = (\pi_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ を求める. このため, 次のようなベクトルと行列を導入する.

$$\boldsymbol{\pi}_{\le n} = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n), \qquad \boldsymbol{\pi}_{> n} = (\pi_{n+1}, \pi_{n+2}, \dots),$$

$$\boldsymbol{P}_{\le n} = (P_{i,j})_{i,j=0,1,\dots,n},$$

$$\boldsymbol{U}_n = (P_{i,j})_{i=0,1,\dots,n}^{j=n+1,n+2,\dots} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_{\le n} = (P_{i,j})_{i,j=n+1,n+2,\dots},$$

$$\boldsymbol{P}_{> n} = \begin{pmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

以下, 定常分布ベクトル$\boldsymbol{\pi}$の存在を仮定する. 上で導入したベクトルと行列を用いると, 平衡方程式$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$から, 任意の$n \in \mathbb{Z}_+$に対して,

$$\boldsymbol{\pi}_{\le n}\boldsymbol{U}_n + \boldsymbol{\pi}_{>n}\boldsymbol{P}_{>n} = \boldsymbol{\pi}_{>n},$$

を得る. これは次のように変形することができる.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}_{>n} &= \boldsymbol{\pi}_{\le n}\boldsymbol{U}_n(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{>n})^{-1} \\ &= (\pi_n b_0, 0, 0, \dots, 0)(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{>n})^{-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

ここで, $\boldsymbol{P}_{>n}$はnに依存しないことに注意し, $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{>n})^{-1}$の最初の行を$\boldsymbol{r} := (r_1, r_2, \dots)$とおくと,

$$\boldsymbol{\pi}_{>n} = \pi_n b_0(r_1, r_2, \dots), \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

となるので, $\gamma = \pi_n b_0 r_1$とおき, 次式を得る.

$$\pi_{n+1} = \gamma\pi_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{290}$$

さらに, 式(290)と正規化条件$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n = 1$から,

$$\pi_n = (1-\gamma)\gamma^n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{291}$$

が成り立つ.

推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ は既約なので, 平衡方程式の解が見つかれば, それが唯一の解であり, $\boldsymbol{P}$ は正再帰的である (定理 6.26). 以上の議論により, 定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ の存在を仮定すると, $\boldsymbol{\pi}$ は式 (291) で与えられることがわかる.

ところで, 式 (291) で表現される定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ が存在することと, 平衡方程式を満たすなパラメータ $\gamma \in (0, 1)$ が存在することは等価である. このパラメータ γ が存在するための必要十分条件は, 第 6.21 節で示したように次式で与えられる.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k b_k > 1.$$

これに式 (287) を代入すると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} \mathrm{d}G(x) &= \int_0^{\infty} e^{-\mu x} \mu x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu x)^{k-1}}{k-1!} \mathrm{d}G(x) \\ &= \mu \int_0^{\infty} x \mathrm{d}G(x) \\ &= \frac{\mu}{\lambda} = \rho^{-1} > 1,\end{aligned}$$

となるので, 定常分布ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ が存在するための必要十分条件は, $\rho < 1$ である.

10.5 待ち時間分布

- W: 待ち時間
- L: 定常状態における到着直前の系内客数

$$\mathsf{P}(L = k) = (1 - \gamma)\gamma^k, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{292}$$

- S_n $(n = 1, 2, \ldots, L - 1)$: 待合室にいる客のサービス時間

$$\mathsf{P}(S_n \leq x) = 1 - e^{-\mu x}, \qquad x \geq 0. \tag{293}$$

- S_e: サービス中である客の残余サービス時間 ($L \geq 1$のとき)

系内に客がnにいるときに到着した客の待ち時間は $S_e + S_1 + \cdots + S_{n-1}$

$$\mathsf{P}(W \leq x) = \mathsf{P}(L = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(L = n)\mathsf{P}(S_e + S_1 + \cdots + S_{n-1} \leq x). \tag{294}$$

S_e はS_n の平衡確率変数(定義 4.4参照)

$\Longrightarrow$ S_n が指数分布に従うのでS_e も同じ指数分布に従う (例 4.2参照)

$\Longrightarrow$ $S_e, S_1, \ldots, S_{n-1}$ は, 独立かつ同一の指数分布に従う

$\Longrightarrow$ $S_e + S_1 + \cdots + S_{n-1}$ は率μのn次アーラン分布に従う

$S_e + S_1 + \cdots + S_{n-1}$ の分布:

$$\mathsf{P}(S_e + S_1 + \cdots + S_{n-1} \le x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!}, \quad x \ge 0. \tag{295}$$

式(295)と(292)を式(294)に代入すると,

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(W \le x) &= 1 - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (1-\gamma)\gamma^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} \right) \\
&= 1 - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} (1-\gamma)\gamma^n \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\gamma)\gamma^n \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} \sum_{n=0}^{k} (1-\gamma)\gamma^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} (1 - \gamma^{k+1}) = 1 - \gamma e^{-\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu \gamma x)^k}{k!} \\
&= 1 - \gamma e^{-(1-\gamma)\mu x}
\end{aligned} \tag{296}$$

10.6　任意時点での系内客数分布

定理 10.1　$\rho < 1$ を仮定する．定常状態における任意時点での系内客数分布 $\{p_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ は次式で与えられる．

$$p_n = \begin{cases} 1-\rho, & n = 0, \\ \rho(1-\gamma)\gamma^{\ell-1}, & n = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{297}$$

ただし, パラメータ γ は到着直前の系内客数分布 $\{\pi_n; n \in \mathbb{Z}_;\}$ に現れるパラメータと同一のものである．

証明　GI/M/1 待ち行列は単純待ち行列であるので, システムを長時間観測したとき, 系内客数が $n-1$ から n に増加する点の発生頻度 r_n^+ と, n から $n-1$ に減少する点の発生頻度 r_n^- は等しい．到着率が λ であり, 到着直前に系内客数が n である確率は π_{n-1} であるので,

$$r_n^+ = \lambda\pi_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

である．一方, 系内客数が n である時間の割合が p_n に等しい．さらに, サービス時

間が独立かつ同一の率μの指数分布に従うことから, 客が一人でもシステムにいるときに発生する退去数は単位時間あたりμである. したがって,

$$r_n^- = p_n \mu, \qquad n \in \mathbb{N},$$

となる. よって, 次式が成り立つ.

$$p_n \mu = \lambda \pi_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

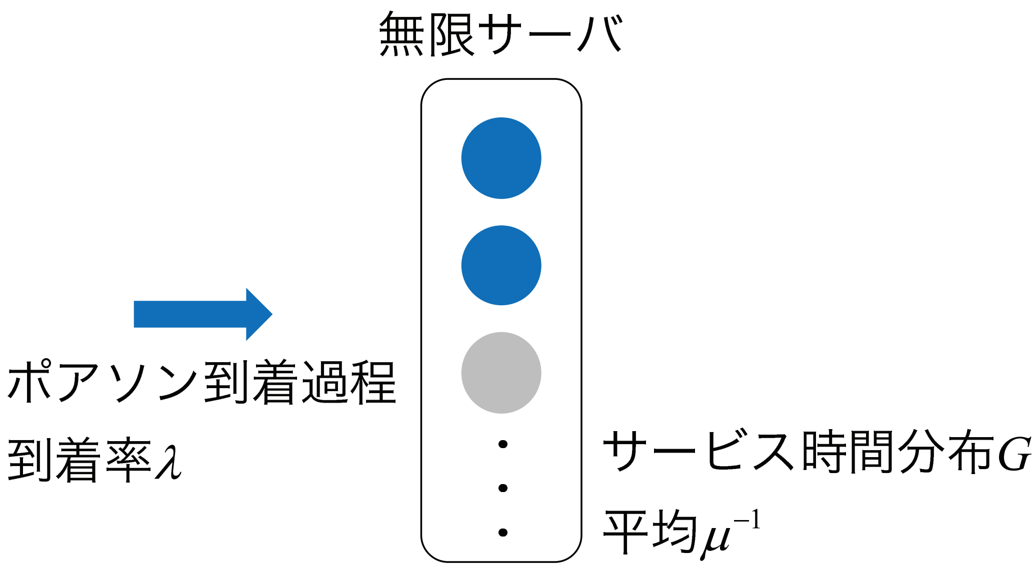
これに式(291)と$\rho = \lambda / \mu$を代入すると,

$$p_n = \rho(1-\gamma)\gamma^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

となるので, 正規化条件$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$と合わせて, 式(297)を得る. □

11 M/G/∞

- サーバは無限個ある
  - 到着客は直ちにサービスを受けられる
  - 待合室なし
- 到着過程: 率 λ のポアソン過程
- サービス時間: 独立で同一分布 G に従う. 平均 $\mu^{-1} \in (0, \infty)$
- トラヒック強度: $\rho \triangleq \lambda/\mu$



時刻t ($t \in \mathbb{R}_+$) での系内客数を$L(t)$とし, $L(0) =$とする. さらに, 時刻tまでの到着総数を$N(t)$とすると, 任意の$t > 0$と$k \in \mathbb{Z}_+$に対して, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(L(t) = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} \mathsf{P}(N(t) = n)\mathsf{P}(L(t) = k \mid N(t) = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathsf{P}(L(t) = k \mid N(t) = n). \end{aligned} \tag{298}$$

以下では, $t > 0$を任意に固定し, $\{N(t) = n\}$という事象が起こったという条件のもとで議論を進める. いま,時刻tまでに到着するnの客のうち任意の客の到着時刻およびサービス時間をそれぞれ, T_*, S_*とする. さらに, その任意客が時刻tにおいてシステムに留まっている確率をp_tと定義すると,

$$\mathsf{P}(L(t) = k \mid N(t) = n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_t^k (1-p_t)^{n-k},$$

となる. これを式(298)に代入すると,

$$\mathsf{P}(L(t) = k) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p_t^k (1-p_t)^{n-k}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p_t t)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\{\lambda t(1-p_t)\}^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda t} e^{\lambda t(1-p_t)} \frac{(\lambda p_t t)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda p_t t} \frac{(\lambda p_t t)^k}{k!},
\end{aligned} \tag{299}
$$

を得る. ここで, サービス時間は到着時刻と独立であり, かつ, 分布 G に従うことから,

$$
\begin{aligned}
p_t &= \int_0^t \mathsf{P}(T_* \in (x, x+\mathrm{d}x], S_* \geq t-x \mid N(t)=n) \\
&= \int_0^t \mathsf{P}(T_* \in (x, x+\mathrm{d}x] \mid N(t)=n, S_* \geq t-x)\mathsf{P}(S_* \geq t-x) \\
&= \int_0^t \mathsf{P}(T_* \in (x, x+\mathrm{d}x] \mid N(t)=n)(1-G(t-x)).
\end{aligned} \tag{300}
$$

となる. また, 定理 4.8 より,

$$
\mathsf{P}(T_* \in (x, x+\mathrm{d}x] \mid N(t)=n) = \frac{\mathrm{d}x}{t}, \qquad t > 0,
$$

であるので, これを式(300)に代入すると,

$$p_t = \int_0^t (1 - G(t-x)) \frac{\mathrm{d}x}{t}$$
$$= \int_0^t (1 - G(x)) \frac{\mathrm{d}x}{t} = \mu t^{-1} G_{\mathrm{e}}(t), \qquad t > 0, \tag{301}$$

を得る. ただし, G_{e}はサービス時間分布Gの平衡分布(残余寿命分布)である. 最後に, 式(301)を式(299)に代入し, $\rho = \lambda/\mu$を用いることで, 次式を得る.

$$\mathsf{P}(L(t) = k) = e^{-\rho G_{\mathrm{e}}(t)} \frac{(\rho G_{\mathrm{e}}(t))^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

なお, 上式において, $t \to \infty$とすると, 系内客数過程の極限分布が導かれる.

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(L(t) = k) = e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{302}$$

さらに, 式(302)から,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathsf{P}(L(u) = k)\mathrm{d}u = e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{303}$$

が成り立ち, 系内客数過程の時間平均分布も, 平均ρのポアソン分布に従う.

12　先着順GI/G/1待ち行列の平均待ち時間

12.1　モデル

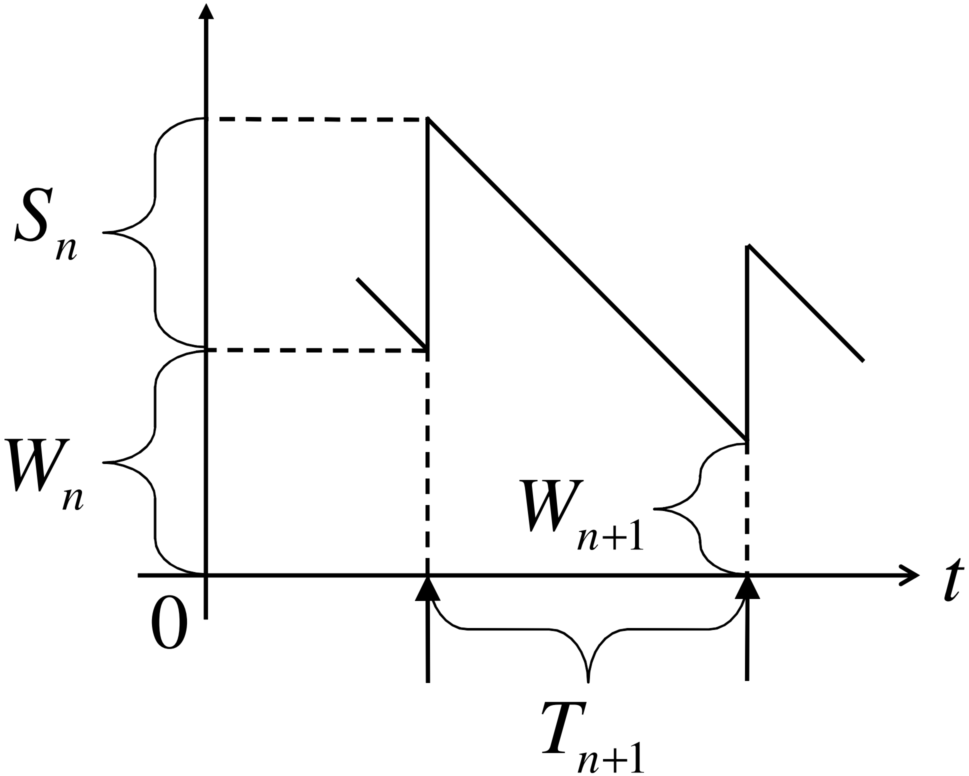
- 単一サーバ
- 待合室の容量は無限
- FCFSかつ非割込み $\Longrightarrow$ 単一サーバモデルなのでFIFOになる
- 到着時間間隔は独立かつ同一に分布
  - T_n $(n \in \mathbb{N})$: $n-1$番目とn番目の到着時刻の間隔
- サービス時間は独立かつ同一に分布
  - S_n $(n \in \mathbb{Z}_+)$: n番目に到着した客のサービス時間
- $X_{n+1} = S_n - T_{n+1} \Longleftarrow$ 独立かつ同一に分布

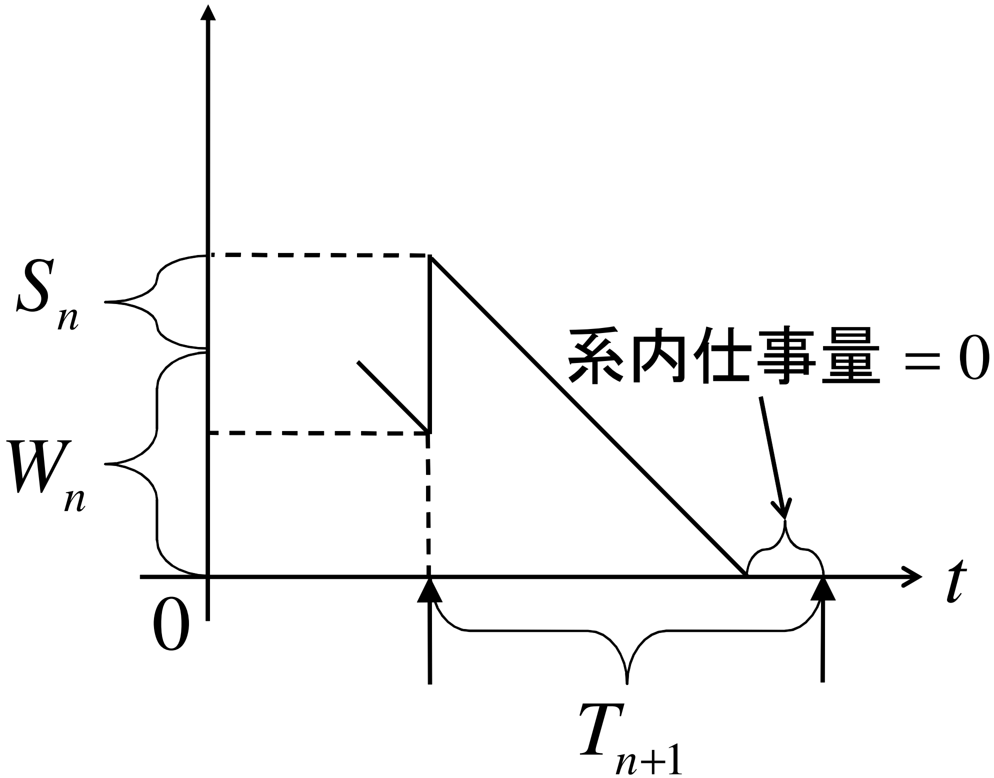
以下では, 確率変数列$\{Z_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$の極限分布が存在し, Z_*がその極限分布に従う確率変数であるとき, 次のように表記する.

$$Z_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Z_*,$$

12.2 Lindleyの再帰式

- W_n $(n \in \mathbb{Z}_+)$: n番目に到着した客の待ち時間





$$W_{n+1} = W_n + S_n - T_{n+1} = W_n + X_{n+1}$$

$$W_{n+1} = 0$$

2つの場合をまとめると,

$$W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})^+ = (W_n + X_{n+1})^+ \quad \text{(Lindleyの再帰式)}.$$

12.3 安定条件

- S: $\{S_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ と同じ分布に従う確率変数
- T: $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ と同じ分布に従う確率変数
- $X = S - T$: $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ と同じ分布に従う確率変数

定理 12.1 $\mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[S] - \mathsf{E}[T] < 0$ かつ $\mathsf{P}(|W_0| < \infty) = 1$ が成り立つとき,

$$W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})^+ = (W_n + X_{n+1})^+, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{304}$$

を満たす $\{W_n; n \in \mathbb{Z}_+\}$ は安定である. すなわち, 任意の初期状態に対して, W_n の分布は同じ極限分布に収束する.

証明　式(304)より,

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \max(0, \max(0, W_{n-1} + X_n) + X_{n+1}) \\ &= \max(0, X_{n+1}, W_{n-1} + X_n + X_{n+1}). \end{aligned}$$

再び式(304)を用いると,

$$\begin{aligned} W_n &= \max(0, X_n, \max(0, W_{n-3} + X_{n-2}) + X_{n-1} + X_n) \\ &= \max(0, X_n, X_{n-1} + X_n, W_{n-3} + X_{n-2} + X_{n-1} + X_n). \end{aligned}$$

同様の操作を繰り返すと, 次式を得る.

$$W_n = \max\left(0, X_n, \sum_{i=n-1}^{n} X_i, \sum_{i=n-2}^{n} X_i, \ldots, \sum_{i=2}^{n} X_i, W_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i\right).$$

ここで, $X_i' = X_{n+1-i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$とおくと,

$$W_n = \max\left(0, X_1', \sum_{i=1}^{2} X_i', \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} X_i', W_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i'\right). \tag{305}$$

定義より, 任意の$n \in \mathbb{Z}_+$に対して,

$$(X_1', X_2', \ldots, X_n') \overset{\mathrm{d}}{=} (X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

が成り立つので, これを式(305)に適用すると,

$$W_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} \max\left(0, X_1, \sum_{i=1}^{2} X_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} X_i, W_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i\right). \tag{306}$$

ここで, 大数の強法則より, 確率1で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[S] - \mathsf{E}[T] < 0,$$

が成り立つので, 同じく確率1で, $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} X_i = -\infty$ となる. また, 確率1で W_0 は有限であることから, $n \to \infty$ とすると, 式(306)の右辺は確率1で有限となり, かつ, W_0 の貢献は消える. よって, $n \to \infty$ としたとき,

$$W_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \sup\left(0, X_1, \sum_{i=1}^{2} X_i, \sum_{i=1}^{3} X_i \ldots\right).$$

したがって, W_n の極限分布が存在し, かつ, W_0 とは独立である. □

12.4 Kingmanの不等式

定理 12.2 以下の(i), (ii), (iii)が満たされるとする.

(i) $\mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[S] - \mathsf{E}[T] < 0$.

(ii) $\mathsf{P}(|W_0| < \infty) = 1$.

(iii) $\mathsf{E}[S^2] < \infty$, $\mathsf{E}[T^2] < \infty$.

このとき, W_* を S および T とは独立でかつ $W_n \xrightarrow{\mathrm{d}} W_*$ を満たす確率変数とすると, 次の不等式が成り立つ.

$$\frac{\mathsf{E}[(X^+)^2]}{2(\mathsf{E}[T] - \mathsf{E}[S])} \le \mathsf{E}[W_*] \le \frac{\mathsf{Var}(T) + \mathsf{Var}(S)}{2(\mathsf{E}[T] - \mathsf{E}[S])}. \tag{307}$$

注意 12.1 $\rho = \mathsf{E}[S]/\mathsf{E}[T]$ を下から1に漸近させる重負荷極限解析より,

$$\lim_{\rho \uparrow 1} \frac{\mathsf{E}[W_*]}{\text{式 (307) の右辺}} = 1,$$

となることが知られている.

定理 12.2の証明　まず準備として, 任意の確率変数 Z に対して,

$$\mathsf{Var}(Z^+) + \mathsf{Var}(Z^-) = \mathsf{Var}(Z) - 2\mathsf{E}[Z^+]\mathsf{E}[Z^-], \tag{308}$$

が成り立つことを示す. ただし, $(x)^- = -\min(x,0) = (-x)^+$ とする.

定義より, $Z = Z^+ - Z^-$, さらに $Z^+Z^- = 0$ より, $Z^2 = (Z^+)^2 + (Z^-)^2$ が成り立つので, $\mathsf{E}[Z] = \mathsf{E}[Z]^+ - \mathsf{E}[Z^-]$, $\mathsf{E}[Z^2] = \mathsf{E}[(Z^+)^2] + \mathsf{E}[(Z^-)^2]$ を得る. これらを用いると,

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}(Z) &= \mathsf{E}[Z^2] - (\mathsf{E}[Z])^2 \\
&= \mathsf{E}[(Z^+)^2] + \mathsf{E}[(Z^-)^2] - \{\mathsf{E}[Z]^+ - \mathsf{E}[Z^-]\}^2 \\
&= \{\mathsf{E}[(Z^+)^2] - (\mathsf{E}[Z]^+)^2\} + \{\mathsf{E}[(Z^-)^2] - (\mathsf{E}[Z]^-)^2\} \\
&\quad + 2\mathsf{E}[Z^+]\mathsf{E}[Z^-] \\
&= \mathsf{Var}(Z^+) + \mathsf{Var}(Z^-) + 2\mathsf{E}[Z^+]\mathsf{E}[Z^-],
\end{aligned}$$

が得られ, 式(308)が成り立つことがわかる.

さて, $Z = W_* + X$ として, 式(308) に代入すると次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Var}((W_* + X)^+) + \mathsf{Var}((W_* + X)^-) \\
&\quad = \mathsf{Var}(W_* + X) - 2\mathsf{E}[(W_* + X)^+]\mathsf{E}[(W_* + X)^-]. \qquad (309)
\end{aligned}$$

ここで, W_* はLindlyの再帰式 $W_{n+1} = (W_n + X_{n+1})^+$ を満たす W_n の極限分布に従う確率変数であるので, $W_* \overset{\mathrm{d}}{=} (W_* + X)^+$ が成り立つ. これを式(309) に代入し, さらに W_* と X が独立であることを用いると,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Var}(W_*) + \mathsf{Var}((W_* + X)^-) \\
&\quad = \mathsf{Var}(W_* + X) - 2\mathsf{E}[W_*]\mathsf{E}[(W_* + X)^-] \\
&\quad = \mathsf{Var}(W_*) + \mathsf{Var}(X) - 2\mathsf{E}[W_*]\mathsf{E}[(W_* + X)^-].
\end{aligned}$$

$Y = (W_* + X)^-$ とおいて上式を $\mathsf{E}[W_*]$ について解くと, 次式が得られる.

$$\mathsf{E}[W_*] = \frac{\mathsf{Var}(X) - \mathsf{Var}(Y)}{2\mathsf{E}[Y]}. \qquad (310)$$

$W_* \overset{\mathrm{d}}{=} (W_* + X)^+$ と $\mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[S] - \mathsf{E}[T]$ を用いると, $\mathsf{E}[Y]$ は次のように計算できる.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[Y] &= \mathsf{E}[(W_* + X)^+] - \mathsf{E}[(W_* + X)] \\ &= \mathsf{E}[W_*] - \mathsf{E}[(W_* + X)] = -\mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[T] - \mathsf{E}[S].\end{aligned}$$

これを式(310)に代入して

$$\mathsf{E}[W_*] = \frac{\mathsf{Var}(X) - \mathsf{Var}(Y)}{2(\mathsf{E}[T] - \mathsf{E}[S])}. \tag{311}$$

右辺の $\mathsf{Var}(Y) \geq 0$ を捨て, $\mathsf{Var}(X) = \mathsf{Var}(T - S) = \mathsf{Var}(T) + \mathsf{Var}(S)$ を代入すると, Kingmanの不等式のうち, 右側の不等式が手に入る.

$$\mathsf{E}[W_*] \leq \frac{\mathsf{Var}(T) + \mathsf{Var}(S)}{2(\mathsf{E}[T] - \mathsf{E}[S])}.$$

左側の不等式を導出するために, Var(Y) を上から評価する. $W_* \geq 0$ より,

$$0 \leq Y = (W_* + X)^- = (-W_* - X)^+ \leq (-X)^+ = X^-.$$

よって, $0 \leq Y \leq X^-$, E$[Y] = -$E$[X]$, $(X^-)^2 = X^2 - (X^+)^2$ を用いると,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathsf{E}[Y^2] - \mathsf{E}[Y]^2 \\ &\leq \mathsf{E}[(X^-)^2] - (\mathsf{E}[X])^2 \\ &= \mathsf{E}[X^2 - (X^+)^2] - (\mathsf{E}[X])^2 \\ &= \mathsf{E}[X^2] - (\mathsf{E}[X])^2 + \mathsf{E}[(X^+)^2] \\ &= \mathrm{Var}(X) - \mathsf{E}[(X^+)^2].\end{aligned}$$

これを式(311) に適用して, 左側の不等式を得る. □

References

[1] 木村 俊一, 待ち行列の数理モデル, 確率工学シリーズ 1, 朝倉書店, 2016.